Université de Marne-la-Vallée

Licence d'informatique et d'I.U.P.
Examen d'algorithmique

23 janvier 1997, durée : 3h

Seule la consultation des supports de cours, travaux dirigés et travaux pratiques est autorisée pendant le contrôle.
Chacune des dix questions compte pour deux points.

Majorité

On considère une suite $S = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ d'entiers positifs. Une majorité de S est un élément qui apparaît strictement plus de $n/2$ fois dans S. On définit $Maj(S)$ par :

$$Maj(S) = \begin{cases} y & \text{si } y \text{ est la majorité de } S, \\ -1 & \text{si } S \text{ n'a pas de majorité.} \end{cases}$$

1 Donner un algorithme de calcul de $Maj(S)$ pour des suites S en ordre croissant. Écrire l'algorithme en langage C après avoir precisé l'implémentation de la suite S.

Décrire comment calculer $Maj(S)$ en temps linéaire pour des suites S dont les éléments appartiennent à l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$.

2 Comment et en combien de temps peut-on tester si un entier y donné est une majorité de S ?

Soient i, j $(1 \leq i < j \leq n)$ deux indices sur la suite S. Soit T la suite

$$(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$$

obtenue par suppression des éléments x_i et x_j de S. Montrer que si $x_i \neq x_j$ et $Maj(S) \neq -1$, $Maj(T) = Maj(S)$. Donner un exemple pour lequel $x_i \neq x_j$ et $Maj(T) \neq Maj(S)$.

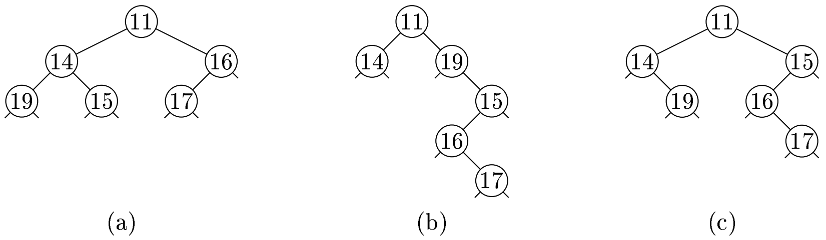
3 Déduire de la question 2 un algorithme linéaire et simple de calcul de $Maj(S)$ qui utilise comme opération élémentaire sur les éléments de S le test d'égalité.

Tournois

Dans ce problème, on considère des arbres binaires dont les nœuds sont étiquetés par les entiers d'un ensemble fini X, $X \subseteq \mathbb{N}$; l'étiquette d'un nœud s est notée $val(s)$. L'arbre binaire vide est noté NIL. Si T est un arbre binaire non vide ses sous-arbres gauche et droit sont notés $\mathcal{G}(T)$ et $\mathcal{D}(T)$ respectivement.

Un arbre binaire T sur X, $X \subseteq \mathbb{N}$, est un *tournoi* (sur X) si
— soit $T = \text{NIL}$ et X est vide,
— soit $T = (r, \mathcal{G}(T), \mathcal{D}(T))$ avec $X = \{val(s) \mid s \text{ nœud de } T\}$, $val(r) \leq val(s)$ pour tout nœud s de T, et les sous-arbres gauche et droit $\mathcal{G}(T)$ et $\mathcal{D}(T)$ sont des tournois.

4 Quels sont ceux des arbres des figures (a), (b) et (c) qui sont des tournois ?



Donner la liste des nœuds en ordre préfixe pour chacun de ces arbres. Montrer que la liste des nœuds en ordre préfixe n'est pas nécessairement caractéristique d'un tournoi.

On définit l'*insertion* d'un élément x dans un tournoi T par :

$$Ins(T,x) = \begin{cases} (s, \text{NIL}, \text{NIL}) \text{ avec } val(s) = x, & \text{si } T = \text{NIL}, \\ (s, T, \text{NIL}) \text{ avec } val(s) = x, & \text{si } T = (r, \mathcal{G}(T), \mathcal{D}(T)) \text{ et } x \leq val(r), \\ (r, \mathcal{G}(T), Ins(\mathcal{D}(T), x)), & \text{si } T = (r, \mathcal{G}(T), \mathcal{D}(T)) \text{ et } x > val(r). \end{cases}$$

5 Quel est le tournoi construit par insertions successives des éléments

$$9,\ 5,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,$$

dans un tournoi initialement vide ? Faire figurer le résultat obtenu après chaque insertion.

Montrer que si T est un tournoi sur X et $x \in \mathbb{N}$, $Ins(T,x)$ est un tournoi sur $X \cup \{x\}$.

La *distance* d'un arbre binaire T est définie par :

$$dist(T) = \begin{cases} 0, & \text{si } T = \text{NIL}, \\ 1 + \min\{dist(\mathcal{G}(T)), dist(\mathcal{D}(T))\}, & \text{si } T = (r, \mathcal{G}(T), \mathcal{D}(T)). \end{cases}$$

On dit d'un tournoi T qu'il est *gauchiste* si
— soit $T = \text{NIL}$,
— soit $T = (r, \mathcal{G}(T), \mathcal{D}(T))$ avec $dist(\mathcal{G}(T)) \geq dist(\mathcal{D}(T))$, et les sous-arbres gauche et droit $\mathcal{G}(T)$ et $\mathcal{D}(T)$ sont des tournois gauchistes.

6 Le tournoi construit à la question 5 est-il gauchiste ? Faire figurer sous chaque nœud la distance du sous-arbre dont il est la racine. Montrer que la condition $dist(\mathcal{G}(T)) \geq dist(\mathcal{D}(T))$ de la définition ci-dessus est équivalente à $dist(T) = 1 + dist(\mathcal{D}(T))$.

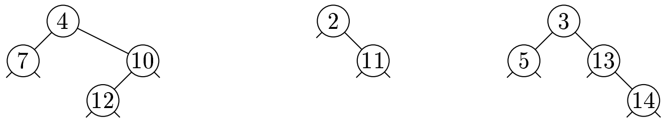
7 Soit T un tournoi gauchiste. Montrer que si $dist(T) = k$ ($k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$) l'arbre T possède au moins 2^{k-1} feuilles et $2^k - 1$ nœuds. Montrer que si T possède n nœuds on a :

$$dist(T) \leq \log_2(n+1).$$

La *permutation gauchiste* d'un tournoi T est définie par

$$PerG(T) = \begin{cases} \text{NIL}, & \text{si } T = \text{NIL}, \\ T, & \text{si } T = (r, \mathcal{G}(T), \mathcal{D}(T)) \text{ et } dist(\mathcal{G}(T)) \geq dist(\mathcal{D}(T)), \\ (r, \mathcal{D}(T), \mathcal{G}(T)), & \text{si } T = (r, \mathcal{G}(T), \mathcal{D}(T)) \text{ et } dist(\mathcal{G}(T)) < dist(\mathcal{D}(T)). \end{cases}$$

8 Figurer la permutation gauchiste de chacun de tournois des figures (d), (e) et (f).



(d) (e) (f)

La permutation gauchiste d'un tournoi gauchiste est-elle nécessairement gauchiste ? Montrer que si $T = (r, \mathcal{G}(T), \mathcal{D}(T))$ est un tournoi et $\mathcal{G}(T)$ et $\mathcal{D}(T)$ sont des tournois gauchistes, $PerG(T)$ est un tournoi gauchiste.

On adopte pour les tournois gauchistes les types de données suivant :

```
typedef struct NOEUD {
    int val, dist;
    NOEUD * g, * d;
 } noeud;
typedef noeud * tournoi;
```

9 On considère un tournoi T pour lequel les membres `dist` sont nuls. Écrire en langage C une fonction d'en-tête

```
void Init_dist(tournoi T)
```

qui, agissant comme une procédure sur T, initialise les membres `dist` (c'est-à-dire donne au membre `dist` de chaque nœud s de T la valeur de la distance du sous-arbre de racine s). Quel est le temps d'exécution de votre fonction ?

On définit l'*insertion gauchiste* d'un élément x dans un tournoi T par :

$$InsG(T, x) = \begin{cases} (s, \text{NIL}, \text{NIL}) \text{ avec } val(s) = x, & \text{si } T = \text{NIL}, \\ (s, T, \text{NIL}) \text{ avec } val(s) = x, & \text{si } T = (r, \mathcal{G}(T), \mathcal{D}(T)) \text{ et } x \leq val(r), \\ PerG((r, \mathcal{G}(T), InsG(\mathcal{D}(T), x))), & \text{si } T = (r, \mathcal{G}(T), \mathcal{D}(T)) \text{ et } x > val(r). \end{cases}$$

10 Quel est le tournoi construit par insertions gauchistes successives des éléments

$$9, \; 5, \; 4, \; 6, \; 8, \; 10,$$

dans un tournoi initialement vide ? Faire figurer le résultat obtenu après chaque insertion.

Montrer que si T est un tournoi gauchiste sur X et $x \in \mathbb{N}$, $InsG(T, x)$ est un tournoi gauchiste sur $X \cup \{x\}$.

Implémenter la fonction $InsG$ en langage C. Quel est son temps d'exécution ?