Université de Marne-la-Vallée

Licence d'informatique et d'I.U.P.
Examen d'algorithmique

Mai 2001, durée : 2h

Seule la consultation des supports de cours, travaux dirigés et travaux pratiques est autorisée pendant le contrôle.

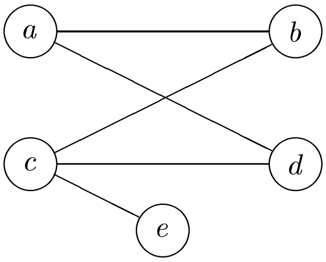
Graphes bi-partis

Soit $G = (S, A)$ un graphe non orienté. On dit que G est *bi-parti* s'il est possible de colorer G au moyen de deux couleurs ; ou, dit autrement, s'il existe une partition de S en deux classes telles que deux sommets adjacents n'appartiennent pas à la même classe.

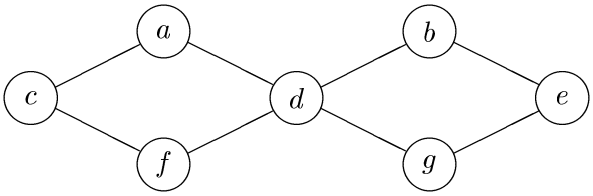
L'objet du problème est de décrire un algorithme qui réalise la bi-partition d'un graphe non orienté lorsque cela est possible.

1. Pour chacun des graphes G_1, G_2 et G_3 ci-dessous, indiquer s'il est bi-parti ou non. Dans le cas positif, donner la partition des sommets correspondante.

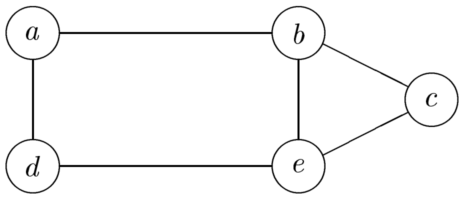
Graphe G_1 :



Graphe G_2 :



Graphe G_3 :



2. En considérant les sommets dans l'ordre alphabétique usuel chaque fois que nécessaire, dessiner l'arbre de l'exploration en profondeur du graphe G_2 ?
3. Pour un graphe bi-parti $G = (\{0, 1, \ldots, n-1\}, A)$, écrire un algorithme qui réalise la partition de ces sommets en considérant un tableau Cl pour noter le numéro de classe des sommets.
4. Indiquer comment modifier l'algorithme précédent pour tester si un graphe G est bi-parti ou non.
5. Montrer qu'un graphe qui possède un cycle de longueur impaire n'est pas bi-parti.

Recherche approchée

Pour deux mots x et y de longueurs respectives m et n, on note R la quantité définie par les relations : pour $i = 0, 1, \ldots, m-1$ et $j = 0, 1, \ldots, n-1$,

$$\begin{aligned}
R[-1,-1] &= 0 \\
R[i,-1] &= R[i-1,-1]+1 \\
R[-1,j] &= 0 \\
R[i,j] &= \min \begin{cases} R[i-1,j-1]+Sub(x[i],y[j]) \\ R[i-1,j]+1 \\ R[i,j-1]+1 \end{cases}
\end{aligned}$$

où $Sub(x[i], y[j]) = 0$ si $x[i] = y[j]$, et $Sub(x[i], y[j]) = 1$ si $x[i] \neq y[j]$.

6. Calculer R pour les mots $x = \texttt{GATAA}$ et $y = \texttt{CAGATAAGAGAA}$.
7. Décrire une fonction en langage C qui calcule R en temps et espace $O(m \times n)$ pour deux mots quelconques x et y de longueurs respectives m et n.
8. Montrer que

$$R[i,j] = \min\{d(x[0 \ldots i], y[\ell \ldots j]) \mid \ell = 0, 1, \ldots, j+1\}$$

pour $i = -1, 0, \ldots, m-1$ et $j = -1, 0, \ldots, n-1$, où d est la distance d'édition (on rappelle que $d(u, v)$ est le nombre minimum d'opérations de substitution, insertion ou suppression nécessaires pour transformer le mot u en le mot v).