Table des matières

1 Notions fondamentales **19**

1 Notations et généralités 19
2 Graphes orientés 20
3 Structures algébriques 21
3.1 Monoïdes 21
3.2 Semi-anneaux 25
3.3 Polynômes et séries formelles 28
3.4 Ensembles et séries rationnels 30
3.5 Ensembles reconnaissables 31
4 Automates 31
4.1 Automates sur un semi-anneau 31
4.2 Automates sur un monoïde 33
4.3 Automates sur un alphabet 35
4.4 Automates à multiplicité 41

2 Automate universel **45**

1 Définitions et propriétés de l'automate universel 46
1.1 Automate universel dans un monoïde quelconque 46
1.2 Automate universel d'un ensemble reconnaissable 51
1.3 Automate universel et générateurs du monoïde 52
1.4 Automate universel d'un langage rationnel de A^* 54
2 Calcul effectif de l'automate universel 56
3 Écorché de l'automate universel 59
4 Développement d'un automate 64
4.1 Motivations et définitions 64
4.2 Propriétés de l'automate développé 68
4.3 Écorché du développé 70

3 Automates universels et langages réversibles **75**

1 Langages réversibles 76
2 Langages à groupe 80
3 Automate universel d'un langage à groupe 80
3.1 Structure générale de l'automate universel d'un langage à groupe . . 80
3.2 Structure des composantes fortement connexes de l'automate universel 82
4 Automate universel d'un langage réversible 86
4.1 Structure générale de l'automate universel d'un langage réversible . 86
4.2 Structure des pelotes de l'automate universel 88
5 Construction d'un automate réversible 90
5.1 Cordes 90
5.2 Automate quasi-réversible et automate universel 91

4 Hauteur d'étoile **97**

1 Hauteur d'étoile et degré d'enlacement 98
1.1 Hauteur d'étoile d'un langage rationnel 98
1.2 Enlacement d'un graphe orienté 99
1.3 Enlacement et hauteur d'étoile 104
1.4 Du calcul d'une expression au théorème d'Eggan 106
2 Hauteur d'étoile des langages à groupe 110
3 Hauteur d'étoile des langages réversibles 114
4 Automate universel et hauteur d'étoile 120

5 Déterminisation des automates (max,+) **123**

1 Le semi-anneau tropical et sa famille 124
2 Caractérisation des séries séquentielles 125
2.1 Séries translatées 125
2.2 Le problème d'une caractérisation topologique 128
3 Décidabilité de la séquentialité dans le cas des alphabets unaires 130
4 Algorithmes 135
4.1 Décidabilité 135
4.2 Déterminisation 136
5 Non-ambiguïté des séries rationnelles sur un alphabet à une lettre 140
6 Automates univoques 143
7 Le cas général 147
8 Problème de la généralisation à d'autres semi-anneaux 148

6 Dérivation d'expressions rationnelles avec multiplicité 149

1 Expressions rationnelles 150
2 Motivation de la dérivation 154
3 Dérivation et termes dérivés 156
4 L'automate des termes dérivés 165
5 Les termes dérivés fantômes 167
6 Variations 169
7 Le cas commutatif 172

— ∘ —

Chapitre 5

Déterminisation des automates $(\mathsf{max},+)$

Le semi-anneau tropical $\mathcal{M}$ a été introduit pour calculer le coût minimal de certaines opérations en recherche opérationnelle. Imaginons un automate dans lequel chaque transition est pondérée par un entier (le coût de la transition). Si un mot représente une suite d'opérations à effectuer, chaque calcul étiqueté par ce mot a un coût (la somme des coûts des transitions); on désire calculer le coût minimal pour lire un mot donné. La somme sera donc la multiplication du semi-anneau et le min son addition.

Ce semi-anneau a aussi été étudié pour résoudre de nombreux problèmes liés à la hauteur d'étoile d'un langage rationnel [32, 34, 41, 58, 60].

D'autres semi-anneaux voisins peuvent être considérés. On peut supposer que chaque transition représente au contraire un gain, on veut alors emprunter le parcours correspondant au gain maximum. L'addition du semi-anneau dans lequel on se place sera alors le max. De même, le support du semi-anneau n'est pas nécessairement restreint à $\mathbb{N}$.

Un problème naturel qui se pose pour les séries rationnelles à coefficients dans ces semi-anneaux est celui de leur séquentialité[1]. Si les séries sont réalisées par des automates non ambigus, on peut adapter les techniques développées par C. Choffrut [14] pour les transducteurs. Ceci a été fait par M. Mohri [49]. Toutefois, les séries réalisées par ce type d'automates sont très particulières, car, on le voit, l'opérateur max n'intervient pas dans le calcul d'un coefficient. Nous montrerons qu'il existe des séries rationnelles qui ne peuvent pas être réalisées par des automates non ambigus. Ceci remet en cause, en particulier, la caractérisation des séries séquentielles par la propriété de *divergence uniforme*.

En effet, dans le cadre des transducteurs, avant de décider de la séquentialité, on décide de la *fonctionnalité* de la série réalisé, ce qui, pour les automates $(\mathsf{max},+)$ revient à dire que chaque calcul étiqueté par un mot donné a la même valeur (nous appellerons un tel automate *univoque*). Par l'intermédiaire du théorème de « cross-section » [23] ou par une construction directe sur l'automate univoque [54], on peut alors construire un automate non ambigu qui réalise la même série.

1. Le problème apparaît d'ailleurs naturel quel que soit le semi-anneau des coefficients.

En toute généralité, le problème s'avère beaucoup plus compliqué. Après avoir donné des propriétés des séries séquentielles et pointé celles qui sont caractéristiques et celles qui ne le sont pas, on montre dans ce chapitre comment décider de la séquentialité d'une série sur un alphabet unaire. Nous montrons que la complexité de cet algorithme ne dépend pas de la taille des coefficients.

L'algorithme de décision s'apparente dans une certaine mesure au théorème de cyclicité sur les matrices à coefficients dans les semi-anneaux $(\mathsf{max},+)$ ([26]), sauf que notre but nous permet de restreindre notre étude à la valeur propre maximale et que ce ce ne sont pas exactement les vecteurs propres qui nous intéressent. En effet, la matrice de transition de l'automate que l'on considère peut avoir plusieurs valeurs propres et la séquentialité de la série réalisée dépend non seulement de la matrice de transition, mais aussi des états initiaux ou terminaux de l'automate.

S. Gaubert [24] a montré que toutes les séries $(\mathsf{max},+)$ rationnelles sur une lettre peuvent être obtenue par *fusion*[2] (c'est-à-dire somme non ambiguë) de séries séquentielles. Ce résultat permet de transformer un automate en automate non ambigu puis d'appliquer le résultat générique sur les automates non ambigus. Le passage par un automate non ambigu peut toutefois se révéler fort coûteux; nous montrons qu'il n'est pas nécessaire pour décider de la séquentialité. Nous donnons, comme conséquence de l'algorithme de déterminisation, une construction (différente de celle de S. Gaubert) d'un automate non ambigu qui accepte une série rationnelle donnée et nous montrons que la taille minimale d'un tel automate peut être arbitrairement grande devant la taille de l'automate de départ.

Nous revenons ensuite sur les automates *univoques* pour expliciter l'adaptation de méthodes données par M.-P. Béal, O. Carton, C. Prieur, et J. Sakarovitch en [5] pour résoudre le problème dans ce cas particulier, ce qui n'apporte aucun résultat de décidabilité nouveau par rapport à [49], mais permet de décider sur ces automates sans recourir à une désambiguïsation qui peut se révéler exponentielle.

En guise de conclusion, nous faisons part d'un résultat de S. Gaubert qui met en rapport le problème de la limitation et celui de la déterminisation, et nous expliquons pourquoi les méthodes mises en œuvre dans ce chapitre sont difficilement extensibles à d'autres semi-anneaux.

1 Le semi-anneau tropical et sa famille

Définition 5.1 *Soit $\mathbb{G}$ un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$, $\mathbb{G}_+$ son intersection avec $\mathbb{R}_+$ et $\mathbb{G}_-$ son intersection avec $\mathbb{R}_-$. On pose $\mathbb{K} = \mathbb{G}$, $\mathbb{G}_+$ ou $\mathbb{G}_-$. Dans les deux derniers cas, on dit que $\mathbb{K}$ est respectivement positif ou négatif.*

$$\mathbb{K}_m = (\mathbb{K} \cup \{\infty\}, \mathsf{min}, +) \text{ est un semi-anneau } (\mathsf{min},+),$$
$$\mathbb{K}_{\mathsf{m}} = (\mathbb{K} \cup \{-\infty\}, \mathsf{max}, +) \text{ est un semi-anneau } (\mathsf{max},+).$$

Le ***semi-anneau tropical*** *est le semi-anneau $\mathcal{M} = \mathbb{N}_m = (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \mathsf{min}, +)$.*

2. *merge* en anglais.

PROPOSITION 5.1 *Le semi-anneau $\mathbb{K}_m$ est isomorphe au semi-anneau $(-\mathbb{K})_{\mathsf{m}}$.*

Cette proposition nous permet de restreindre notre étude aux semi-anneaux $(\mathsf{max},+)$.

Nous allons donc étudier les séries rationnelles de $\mathbb{K}\langle\langle A^*\rangle\rangle$ (ou de $\mathbb{K}_{\mathsf{m}}\langle\langle A^*\rangle\rangle$ selon qu'on les considère comme des fonctions à valeur dans $\mathbb{K}$ ou des applications à valeurs dans $\mathbb{K}_{\mathsf{m}}$). Le support d'une telle série α est l'ensemble des mots u de A^* tels que $\langle\alpha,u\rangle \neq -\infty$.

D'autre part, les semi-anneaux $(\mathsf{max},+)$ ont ceci de particulier qu'une somme finie d'éléments est toujours égale à l'un des termes. Dans un automate $\mathcal{A}$ qui réalise une série α de $\mathbb{K}_{\mathsf{m}}\langle\langle A^*\rangle\rangle$, pour tout mot u, il existe donc un calcul étiqueté par u dont la valeur est exactement $\langle\alpha,u\rangle$. On appellera un tel calcul un **calcul victorieux**.

2 Caractérisation des séries séquentielles

2.1 Séries translatées

Le théorème 1.5 nous indique qu'une série rationnelle sur A à coefficients dans un semi-anneau $\mathbb{K}$ est séquentielle si et seulement si ses quotients appartiennent à un $\mathbb{K}$-cône finiment engendré. Nous allons essayer de définir un ensemble générateurs canoniques de ce cône. Si le pgcd est uniquement défini, chaque série α peut alors s'écrire de façon unique $k \otimes \alpha'$, où k est le pgcd des coefficients de α.

Si $\mathbb{K}$ est un sous-groupe de $\mathbb{G}$, le pgcd est loin d'être unique (on peut *factoriser* les éléments de $\mathbb{K}_m$ par n'importe quel élément de $\mathbb{K}$). Il nous faudra donc adapter notre définition. En revanche, si $\mathbb{K}$ est positif ou négatif, le pgcd est uniquement défini dans le semi-anneau $\mathbb{K}_{\mathsf{m}}$. On peut donc rechercher les générateurs *canoniques* du cône qui contient les quotients. Si $\mathbb{K}$ est positif, le pgcd de deux nombres a et b de $\mathbb{K}_{\mathsf{m}}$ différents de $-\infty$ est égal au min de ces deux nombres (car la multiplication du semi-anneau est la somme usuelle); s'il est négatif, il s'agit du max.

Nous définissons donc le pgcd des coefficients du quotient d'une série α par un mot u de la façon suivante:

DÉFINITION 5.2 *Soit α une série de $\mathbb{K}_{\mathsf{m}}\langle\langle A^*\rangle\rangle$. On définit $\overset{\circ}{\alpha}$ par:*

$$\langle \overset{\circ}{\alpha},u\rangle = \begin{cases} \mathsf{inf}\{\langle u^{-1}\alpha,v\rangle \mid v \in u^{-1}\,\mathsf{Supp}(\alpha)\}, \text{ si } \mathbb{K} \text{ est positif,} \\ \mathsf{sup}\{\langle u^{-1}\alpha,v\rangle \mid v \in u^{-1}\,\mathsf{Supp}(\alpha)\}, \text{ si } \mathbb{K} \text{ est négatif,} \\ \langle u^{-1}\alpha,v\rangle, \text{ avec } v \text{ minimal pour l'ordre radiciel si } \mathbb{K} \text{ est un groupe.} \end{cases}$$

On définit ainsi une série $\overset{\circ}{\alpha}$ dont le support est A^*.

REMARQUE 5.1 Supposons α rationnelle et $\mathbb{K}$ négatif. Soit n le nombre d'états d'un automate qui réalise α.[3] Pour tout u dans $\mathsf{Supp}(\alpha)$ de longueur supérieur à n, tout calcul victorieux étiqueté par u comporte une boucle étiquetée par v. On peut décomposer u en $x.v.y$. Il existe donc un chemin étiqueté par $x.y$ dont la valeur est supérieure à la valeur

3. D'après la remarque 1.14, chaque quotient de α peut etre réalisé par un automate à n états.

de tout calcul victorieux étiqueté par u, donc $\langle \alpha,u\rangle \leqslant \langle \alpha,x.y\rangle$. Si α est rationnelle, ses quotients aussi, le « sup » employé dans la définition ci-dessus peut donc être appliqué à un ensemble fini; c'est alors un « max ».

Si $\mathbb{K}$ est positif et α rationnelle, l'« inf » est évidemment aussi un « min ». Toutefois, ce minimum peut être réalisé par un mot de longueur non polynomiale dans la taille de l'automate. Le calcul effectif du inf s'en trouve compliqué. Ce cas est illustré par l'exemple suivant qui doit beaucoup à la construction de M. Chrobak dans [15].

Exemple 20 Soit k un entier et A un alphabet unaire. On définit, pour tout i dans $[1;k]$, un automate $\mathcal{A}_i$ à multiplicité sur $\mathbb{N}_{\mathsf{m}}$, qui est un circuit de n_i états $p_{i,1},p_{i,2},\ldots,p_{i,n_i}$:

$$E_{(p_{i,k},a,p_{i,l})} = \begin{cases} 0 & \text{si } l-k=1 \mod n_i \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout i, seul l'état $p_{i,1}$ est initial :

$$I_{p_{i,k}} = \begin{cases} 0 & \text{si } k=1 \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour tout $i>1$, les états différents de p_{i,n_i} sont terminaux, avec multiplicité 1 ($T_{p_{i,k}}=1$ si $k\neq n_i$ et $T_{p_{i,k}}=-\infty$).

$$T_{p_{i,k}} = \begin{cases} -\infty & \text{si } k=n_i \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $i=1$, l'état p_{1,n_1} est terminal, mais avec multiplicité 0 :

$$T_{p_{i,k}} = \begin{cases} 0 & \text{si } k=n_i \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On considère la série réalisée par l'union de ces automates. Son support est a^*. Le plus petit mot dont la valeur maximale sur les chemins est 0 est de longueur $\mathsf{ppcm}\{n_i \mid i\in[1;k]\}-1$. Si on suppose que la somme des n_i est égale à n fixé, quelle est la valeur maximale $F(n)$ de leur ppcm? Ce problème classique d'arithmétique est connu comme problème de Landau. Il a été montré ([63]) que $F(n)=O(e^{\sqrt{n\ln n}})$, ce qui conclut notre exemple.

La définition précédente nous permet de trouver un système générateur du cône des quotients :

Définition 5.3 *La* ***translatée*** *(à gauche) de la série α de $\mathbb{K}\langle\langle A^*\rangle\rangle$ par un mot u de A^*, notée α/u, est définie par :*

$$\forall v\in A^*,\ \langle \alpha/u,v\rangle = \langle u^{-1}\alpha,v\rangle - \langle \overset{\circ}{\alpha},u\rangle.$$

Noter qu'on utilise le signe « − », c'est-à-dire la division du semi-anneau. Ceci est possible car $\langle \overset{\circ}{\alpha},u\rangle$ est justement défini comme un pgcd des coefficients de $u^{-1}\alpha$.

De même que pour les quotients, la définition des translatées induit la définition d'une action à droite de A^* sur les séries, puisque, pour tout mot u et toute lettre a, pour toute série α, $(\alpha/u)/a = \alpha/(u.a)$.

On va montrer qu'on obtient bien la caractérisation voulue, à savoir :

PROPOSITION 5.2 *Une série de* $\mathbb{K}\mathrm{Rat}\, A^*$ *est séquentielle si et seulement si le nombre de ses translatées est fini.*

LEMME 5.3 *Soit* u *et* u' *deux mots de* A^*. *Si* $u^{-1}\,\mathsf{Supp}(\alpha) = u'^{-1}\,\mathsf{Supp}(\alpha)$ *et qu'il existe une constante* $c_{u,u'}$ *de* $\mathbb{R}$ *telle que, pour tout mot* v *de* $u^{-1}\,\mathsf{Supp}(\alpha)$, $\langle\alpha,u.v\rangle - \langle\alpha,u'.v\rangle = c_{u,u'}$, *alors* $c_{u,u'} = \langle\overset{\circ}{\alpha},u\rangle - \langle\overset{\circ}{\alpha},u'\rangle$ *et* $\alpha/u = \alpha/u'$.

Démonstration. Si $\mathbb{K}$ est un groupe, comme $u^{-1}\,\mathsf{Supp}(\alpha) = u'^{-1}\,\mathsf{Supp}(\alpha)$, il existe un mot v (élément minimal de cet ensemble) tel que $\langle\overset{\circ}{\alpha},u\rangle = \langle u^{-1}\alpha,v\rangle$ et $\langle\overset{\circ}{\alpha},u'\rangle = \langle u'^{-1}\alpha,v\rangle$. Donc $\langle\overset{\circ}{\alpha},u\rangle - \langle\overset{\circ}{\alpha},u'\rangle = \langle\alpha,u.v\rangle - \langle\alpha,u'.v\rangle = c_{u,u'}$ et, pour tout mot v de $u^{-1}\,\mathsf{Supp}(\alpha)$,

$$\langle\alpha/u,v\rangle = \langle\alpha,u.v\rangle - \langle\overset{\circ}{\alpha},u\rangle = \langle\alpha,u'.v\rangle + c_{u,u'} - \langle\overset{\circ}{\alpha},u'\rangle - c_{u,u'} = \langle\alpha/u,v\rangle.$$

Si $\mathbb{K}$ est positif, il existe un mot v dans $v \in u^{-1}\,\mathsf{Supp}(\alpha)$ tel que $\langle u^{-1}\alpha,v\rangle = \langle\overset{\circ}{\alpha},u\rangle$. Comme pour tout mot w de $u^{-1}\,\mathsf{Supp}(\alpha)$, la distance entre les coefficients de w dans $u^{-1}\alpha$ et $u'^{-1}\alpha$ est constante, le minimum de $u'^{-1}\alpha$ est aussi réalisé en v et $\langle\overset{\circ}{\alpha},u'\rangle = \langle u'^{-1}\alpha,v\rangle$. D'où $c_{u,u'} = \langle\overset{\circ}{\alpha},u\rangle - \langle\overset{\circ}{\alpha},u'\rangle$ et, pour tout mot v de $u^{-1}\,\mathsf{Supp}(\alpha)$,

$$\langle\alpha/u,v\rangle = \langle\alpha,u.v\rangle - \langle\overset{\circ}{\alpha},u\rangle = \langle\alpha,u'.v\rangle + c_{u,u'} - \langle\overset{\circ}{\alpha},u'\rangle - c_{u,u'} = \langle\alpha/u,v\rangle.$$

De même si $\mathbb{K}$ est négatif. □

Démonstration de la proposition 5.2. Soit α une série de $\mathbb{K}\mathrm{Rat}\, A^*$ dont le nombre de translatées est fini. Posons Q_α l'ensemble des translatées. On définit l'automate $\mathcal{A}_\alpha$ dont l'ensemble d'états est Q_α par sa représentation linéaire (λ,μ,ν) :

$$\lambda_\gamma = \begin{cases} \langle\overset{\circ}{\alpha},1_{A^*}\rangle \text{ si } p = \alpha/1_{A^*}, \\ -\infty \text{ sinon,} \end{cases}$$

$$\nu_\gamma = \langle p,1_{A^*}\rangle,$$

$$\forall a \in A,\ (a\mu)_{\gamma,\gamma'} = \begin{cases} \langle\gamma,a\rangle - \langle\gamma',1_{A^*}\rangle \text{ si } \gamma' = \gamma/a, \\ -\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

D'une part cet automate est déterministe. En effet, son seul état initial est $\alpha/1_{A^*}$, et si deux mots u et v donnent la même translatée,

$$\mathsf{Supp}(\alpha/(u.a)) = a^{-1}\,\mathsf{Supp}(\alpha/u) = a^{-1}\,\mathsf{Supp}(\alpha/v) = \mathsf{Supp}(\alpha/(v.a))$$

et, pour tout mot w de $\mathsf{Supp}(\alpha/(u.a))$,

$$\langle\alpha,u.a.w\rangle = \langle\overset{\circ}{\alpha},u\rangle + \langle\alpha/u,a.w\rangle = \langle\overset{\circ}{\alpha},u\rangle + \langle\alpha/v,a.w\rangle = \langle\alpha,v.a.w\rangle + \langle\overset{\circ}{\alpha},u\rangle - \langle\overset{\circ}{\alpha},v\rangle.$$

Donc, d'après le lemme précédent, $u.a$ et $v.a$ donnent la même translatée. D'autre part cet automate réalise la série α. En effet, pour tout mot $u = u_1 \dots u_k$ (on pose $u_0 = 1_{A^*}$), le calcul étiqueté par u a pour multiplicité :

$$\begin{aligned}
&\langle \overset{\circ}{\alpha}, 1_{A^*} \rangle + \sum_{i=1}^{k} (\langle \alpha/(u_1 \dots u_{i-1}), u_i \rangle - \langle \alpha/(u_1 \dots u_i), u_{i-1} \rangle) + \langle \alpha/u, 1_{A^*} \rangle \\
&\langle \overset{\circ}{\alpha}, 1_{A^*} \rangle + \sum_{i=1}^{k} (\langle \overset{\circ}{\alpha}, (u_1 \dots u_i) \rangle - \langle \overset{\circ}{\alpha}, u_1 \dots u_{i-1} \rangle) + \langle \alpha/u, 1_{A^*} \rangle \\
&\quad = \langle \overset{\circ}{\alpha}, u \rangle + \langle \alpha/u, 1_{A^*} \rangle = \langle \alpha, u \rangle
\end{aligned}$$

Réciproquement, soit $\mathcal{A} = \langle\, Q, A, E, I, T \,\rangle$ un automate déterministe qui réalise la série séquentielle α. Soit i l'état initial de $\mathcal{A}$. Soit u et v deux mots qui mènent dans le même état p de $\mathcal{A}$. Alors, $u^{-1}\,\mathsf{Supp}(\alpha) = v^{-1}\,\mathsf{Supp}(\alpha)$ (de même que pour un automate déterministe sans multiplicité). Et, pour tout mot w de $u^{-1}\,\mathsf{Supp}(\alpha)$,

$$\begin{aligned}
\langle \alpha, uw \rangle - \langle \alpha, vw \rangle &= (I_i + i * u + (i \cdot u) * w + T_{(i \cdot uw)}) - (I_i + i * v + (i \cdot v) * w + T_{(i \cdot vw)}) \\
&= i * u - i * v
\end{aligned}$$

Cette différence ne dépend pas de w. Donc, d'après le lemme précédent, les translatées de α par rapport à u et à v sont égales. Le nombre de translatées de α est donc au plus égal au nombre d'états de $\mathcal{A}$, donc fini. □

Remarque 5.2 On voit dans cette preuve que, si la série est séquentielle, il existe un automate minimal canonique dont les états sont les translatées de la série. Un algorithme de minimisation a été donné par M. Mohri [49].

— ∘ —

2.2 Le problème d'une caractérisation topologique

Dans le cadre de l'étude des transducteurs a été introduite la notion de fonction uniformément divergente (ou fonction « à variations bornées ») [14]. On peut adapter cette définition aux séries rationnelles d'un semi-anneau (max,+).

Définition 5.4 *Soit α une série de $\mathbb{K}\mathrm{Rat}\, A^*$. La série α est* ***uniformément divergente*** *si, quels que soient les mots u et v du support de α, la distance entre $\langle \alpha, u \rangle$ et $\langle \alpha, v \rangle$ est bornée par une quantité qui dépend uniquement de la distance entre u et v. Formellement :*

$$\begin{gathered}
\forall k \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{R}_+, \forall u, v \in \mathsf{Supp}(\alpha), \\
d_{\mathsf{pref}}(u, v) \leqslant k \Rightarrow |\langle \alpha, u \rangle - \langle \alpha, v \rangle| \leqslant N.
\end{gathered}$$

Proposition 5.4 *Les séries séquentielles sont uniformément divergentes.*

Démonstration. Si α est séquentielle, le nombre de ses translatées est fini. Posons, pour tout k,

$$N_k = \max_{u\in A^*} \max_{\substack{v\in \mathsf{Supp}(\alpha/u)\\ |v|\leqslant k}} \{\langle \alpha/u,v\rangle\}.$$

La définition de N_k comporte des maxima qui portent en fait sur des ensembles finis, puisque le nombre de translatées est fini et que le nombre de mots de longueur inférieure à k aussi. La quantité N_k est donc bien définie et, elle aussi, finie.
Pour tout couple de mots u et v du support de α, tels que $d_{\mathsf{pref}}(u,v) \leqslant k$, posons $w = u\wedge v$; on peut écrire $u = w.u'$ et $v = w.v'$, avec $|u'| + |v'| \leqslant k$. On obtient :

$$|\langle \alpha,u\rangle - \langle \alpha,v\rangle| = |\langle \alpha/w,u'\rangle - \langle \alpha/w,v'\rangle| \leqslant 2N_k.$$

La série α est donc uniformément divergente. □

Dans le cas des transducteurs cette propriété est caractéristique des fonctions séquentielles [14]. Ce n'est malheureusement pas le cas dans le cadre des séries $(\mathsf{max},+)$, ce qui nous empêche d'adapter un certain nombre de techniques pour décider de la séquentialité, comme l'utilisation de la « twinning property » par exemple. Nous verrons dans quels cas (restreints) on peut étendre les résultats connus sur les transducteurs aux automates $(\mathsf{max},+)$.

Proposition 5.5 *Une série rationnelle uniformément divergente n'est pas nécessairement séquentielle.*

La preuve de cette proposition se présente sous la forme de l'exemple suivant.

Exemple 21 Soit α_1 la série à coefficients dans $\mathbb{N}_{\mathsf{m}}$ sur $\{a,b\}^*$ définie de la façon suivante: pour tout mot u de A^*, $\langle \alpha_1,u\rangle = \mathsf{max}(|u|_a,|u|_b)$. Cette série est bien rationnelle. Elle est réalisée par l'automate présenté figure 1. D'autre part, cette série est uniformément

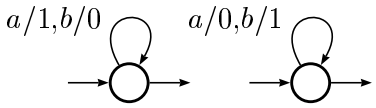


Fig. 1 – *Un automate non déterminisable.*

divergente, elle est même lipschitzienne. En effet, pour tout mot u et tout préfixe w de u ($u = w.u'$), $\langle \alpha_1,u\rangle$ appartient à $[\langle \alpha_1,w\rangle,\langle \alpha_1,w\rangle + |u'|]$; donc, pour tout couple de mots $u = w.u'$ et $v = w.v'$ de A^*, avec $w = u\wedge v$,

$$|\langle \alpha_1,u\rangle - \langle \alpha_1,v\rangle| \leqslant |u'| + |v'| \leqslant d_{\mathsf{pref}}(u,v)$$

Enfin, cette série n'est pas séquentielle. En effet, elle compte un nombre infini de translatées. Par exemple, pour tout couple d'entiers distincts n et m, les séries α/a^n et α/a^m sont distinctes: si $n < m$, $\langle \alpha/a^n,b^m\rangle = m - n$, alors que $\langle \alpha/a^m,b^m\rangle = 0$.

Cette remarque est à mettre en rapport avec le résultat transposé aux automates (max,+) par M. Mohri [49] selon lequel toute série de $\mathbb{K}\mathrm{Rat}\, A^*$ réalisable par un automate non ambigu qui est uniformément divergente est séquentielle. D'où l'on déduit :

PROPOSITION 5.6 *Il existe des séries rationnelles de* $\mathbb{K}\mathrm{Rat}\, A^*$ *qui ne peuvent pas être réalisées par un automate non ambigu.*

Nous reviendrons plus tard sur la déterminisation des séries réalisées par des automates non ambigus.

3 Décidabilité de la séquentialité dans le cas des alphabets unaires

Nous allons voir que pour un alphabet unaire, les séries rationnelles sont beaucoup plus simples que dans le cas général. Elles sont en effet toutes réalisables de façon non ambiguë, donc la propriété de divergence uniforme est caractéristique des séries séquentielles. Le but est d'obtenir un algorithme de décidabilité qui dépende uniquement de la structure de l'automate de départ, et non de la forme des coefficients.

Pour alléger les notations, nous identifions le monoïde libre engendré par une lettre à $\mathbb{N}$. Dans ce cadre, la représentation linéaire d'un automates dont les états forment un ensemble Q est le triplet (λ,μ,ν), où λ et ν sont des vecteurs de $\mathbb{K}_{\mathsf{m}}^{Q}$ et μ une matrice de $\mathbb{K}_{\mathsf{m}}^{Q\times Q}$. L'automate réalise la fonction α :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \langle \alpha,n\rangle = \lambda \otimes \mu^n \otimes \nu.$$

DÉFINITION 5.5 *Le* ***poids d'un circuit*** *d'un automate à multiplicité est le rapport de sa valeur sur sa longueur. On appelle* ***graphe critique*** *l'ensemble des états et des transitions qui appartiennent à des circuits de poids maximum.*

Dans ce qui suit, on utilisera, à propos d'un $\mathbb{K}$-automate $\mathcal{A}$ les notations suivantes :

- M est le maximum des valeurs absolues des coefficients de $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire des coefficients des transitions, mais aussi des vecteurs initial et terminal).
- n est le nombre d'états de $\mathcal{A}$.
- ρ désigne le poids maximal des circuits de l'automate. En fait, il n'est pas difficile de remarquer que ρ est le poids maximal des circuits élémentaires de l'automate.
- δ est la différence minimale entre ρ et les poids des autres circuits élémentaires.
- $\mathcal{L}_\rho$ est l'ensemble des mots acceptés par $\mathcal{A}$ pour lesquels il existe un chemin qui emprunte un état du graphe critique.
- $\mathcal{L}_{\overline{\rho}}$ est le complément de $\mathcal{L}_\rho$ dans l'ensemble des mots acceptés par $\mathcal{A}$: $\mathcal{L}_{\overline{\rho}} = \mathcal{L}_{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{L}_\rho$.

EXEMPLE 22.1 L'automate $\mathcal{A}_{\mathsf{m}_1}$ présenté figure 2 a cinq états ($n = 5$). Ses coefficients sont compris entre -2 et 2 ($M = 2$). Il comporte deux circuits élémentaires dont les poids respectifs sont 1 et 3/2 ($\rho = 3/2$, $\delta = 1/2$). Le graphe critique est formé des états s et t

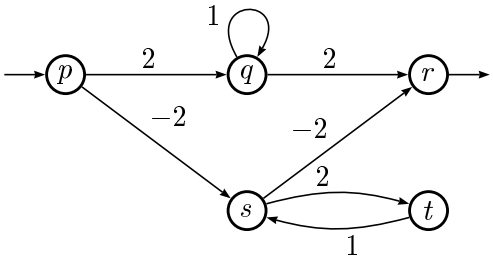


FIG. 2 – *L'automate* $\mathcal{A}_{\mathsf{m}_1}$.

ainsi que des deux transitions entre ces états. Les calculs de cet automate passant par s ou t sont ceux de longueur paire non nulle, donc $\mathcal{L}_\rho = \{2k \mid k > 0\}$. Comme il existe des calculs de n'importe quelle longueur supérieure à 2, $\mathcal{L}_{\overline{\rho}} = \{2k+1 \mid k > 0\}$.

Le théorème suivant donne un critère qui permettra de décider la séquentialité d'une série.

THÉORÈME 5.1 *Soit $\mathcal{A}$ un automate unaire à multiplicité dans un semi-anneau $(\mathsf{max},+)$ et ρ le poids maximal de ses circuits. Soit $\mathcal{L}_{\overline{\rho}}$ l'ensemble des mots acceptés par $\mathcal{A}$ qui n'étiquettent aucun chemin passant par un état du graphe critique. La série rationnelle réalisée par l'automate α est séquentielle si et seulement si $\mathcal{L}_{\overline{\rho}}$ est fini.*

Ce théorème est équivalent aux propositions 5.8 et 5.11 que nous allons prouver séparément.

Le résultat suivant montre que les coefficients d'une série rationnelle unaire sont bornés supérieurement par une progression arithmétique de raison ρ (poids maximal des circuits de l'automate qui réalise la série) et que certains coefficients restent à distance bornée de cette progression.

PROPOSITION 5.7 *Soit α une série rationnelle réalisée par un automate unaire $\mathcal{A}$. Soit n le nombre d'états de $\mathcal{A}$, ρ le poids maximum de ses circuits et M le maximum des valeurs absolues de ses coefficients.*
Alors, pour tout entier k de $\mathbb{N}$,

$$\langle \alpha, k \rangle \leqslant \rho k + M(n+2),$$
$$\exists (r,s) \in \mathbb{N}^2, \langle \alpha, rk+s \rangle \geqslant \rho(rk+s) - M(4n+2).$$

Démonstration. Montrons la première inégalité par récurrence sur k. Mais d'abord, remarquons que s'il n'existe pas de calcul de longueur k dans $\mathcal{A}$, alors $\langle \alpha, k \rangle = -\infty$ et l'inégalité est vérifiée. Si $k \leqslant n$, puisque tout calcul de longueur k a une valeur inférieure à $M(k+2)$, l'égalité est vraie. Pour tout $k > n$, considérons un calcul de valeur maximale de longueur k. Ce calcul comporte obligatoirement un circuit de longueur $c < k$ et de valeur au plus $c\rho$. Le reste du calcul (de longueur $k-c$) a, par hypothèse de récurrence, une valeur au plus égale à $\rho(k-c) + M(n+2)$; la valeur du calcul de longueur k est donc bien au plus $\rho k + M(n+2)$.

Construisons les entiers qui vérifient la seconde inégalité. Considérons un circuit de poids maximum; soit p un état de ce circuit et r sa longueur. Il existe deux chemins qui vont respectivement d'un état initial à p et de p à un état final et dont la longueur totale s est inférieure à $2n$. Leur valeur totale est donc supérieure à $-M(2n+2)$ [4]. Pour tout entier k et pour tout mot de longueur $rk+s$, il existe donc un calcul de valeur supérieure à $\rho rk - M(2n+2)$. Cette quantité est elle-même supérieure à $\rho(rk+s) - M(4n+2)$. □

PROPOSITION 5.8 *Avec les notations du théorème 5.1, si une série rationnelle α réalisée par un automate $\mathcal{A}$ est séquentielle, $\mathcal{L}_{\overline{\rho}}$ est fini.*

Démonstration. Soit s et r les entiers définis à la proposition 5.7. Si une série est séquentielle, elle est uniformément divergente, donc il existe un entier c tel que :

$$|i-j| \leqslant r \Rightarrow |\langle \alpha,i\rangle - \langle \alpha,j\rangle| \leqslant c.$$

Soit δ la différence entre ρ et les poids des autres circuits élémentaires. Pour tout l de $\mathcal{L}_{\overline{\rho}}$, $\langle \alpha,l\rangle \leqslant M(n+2) + (\rho-\delta)l$. Posons $k = \lceil (l-s)/r \rceil$. On a alors :

$$\begin{aligned}\langle \alpha,rk+s\rangle - \langle \alpha,l\rangle &> [\rho(rk+s) - M(4n+2)] - [M(n+2) + (\rho-\delta)l] \\ &> \delta l - M(5n+4).\end{aligned}$$

Si $\mathcal{L}_{\overline{\rho}}$ est infini, on peut prendre un élément l supérieur à $[M(5n+4)+c]/\delta$. En prenant k comme ci-dessus, on obtient que $|rk+s-l| < r$ et $|\langle \alpha,rk+s\rangle - \langle \alpha,l\rangle| > c$, ce qui contredit la divergence uniforme. □

On va maintenant prouver la proposition inverse. Pour cela, on utilise un petit lemme combinatoire :

LEMME 5.9 *Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, pour tout k supérieur à n, quel que soit l'ensemble $(x_i)_{i\in[1;k]}$ d'éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, il existe un sous-ensemble J de $[1;k]$ tel que*

$$\sum_{i\in J} x_i = 0.$$

Démonstration. C'est en fait une application simple du lemme des tiroirs. Pour j appartenant à $[1;k]$, notons S_j la somme des j premiers x_i. Si l'une de ces sommes est nulle, on obtient le résultat, sinon, ces k sommes ne peuvent prendre que $n-1$ valeurs possibles; il en existe donc deux (S_i et S_j, avec $i<j$, par exemple) qui ont la même valeur. La somme des éléments de $i+1$ à j est donc nulle. □

Ce lemme s'applique aux mots dans un automate.

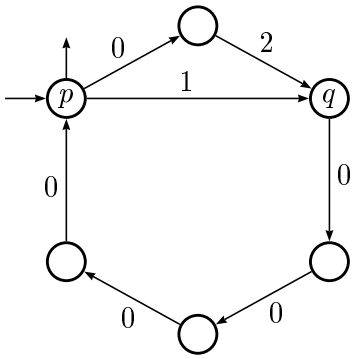
LEMME 5.10 *Soit $\mathcal{A}$ un automate unaire à n états. Pour tout k, s'il existe un calcul de longueur k qui passe par un état du graphe critique, il existe un calcul de longueur k qui contient des circuits de poids maximum dont la suppression donne un calcul de longueur inférieure à n^2.*

4. en prenant en compte les valeurs initiale et terminale.

Démonstration. Si k est inférieur à n^2, il vérifie le lemme. Supposons maintenant qu'il existe k strictement supérieur à n^2 qui contredise le lemme. On suppose k minimal : c'est l'entier le plus petit tel qu'il existe un calcul de longueur k qui passe par un état du graphe critique, mais tel qu'il n'existe aucun calcul qui contient un circuit de poids maximum (car en enlevant ce circuit, soit on obtiendrait un chemin de longueur inférieur à n^2, soit on contredirait la minimalité de k). Considérons un calcul $\mathcal{C}$ de longueur k passant par un état p qui appartient à un circuit de poids maximum de longueur l.

Comme k est supérieur à n^2, on peut découper le calcul $\mathcal{C}$ en n morceaux de longueurs n qui contiennent chacun au moins un circuit (lemme des tiroirs). D'après le lemme précédent, on peut choisir un certain nombre de ces circuits de façon à ce que la somme de leur longueur est un multiple de l. En supprimant ces circuits et en insérant suffisament de fois le circuit de poids maximal de longueur l autour de p, on obtient un chemin de longueur k qui contient un circuit de poids maximal et, en même temps, une contradiction. □

Exemple 23 La borne quadratique que l'on obtient dans cette proposition est proche d'une borne optimale. La famille d'automates suivante réalise presque cette borne :



Ici, $n = 6$. Il y a deux circuits élémentaires de poids respectifs $2/n$ et $1/(n-1)$. Les calculs de longueur kn^2+1 empruntent, pour tout k, au moins 5 fois la transition entre p et q, lorsqu'on a supprimé tous les circuits de longueur n, il reste donc au moins $n-1$ circuits de longueur $n-1$, soit $(n-1)^2$ transitions. On peut d'ailleurs remarquer qu'on peut emprunter de nombreuses fois les transitions du graphe critique sans parcourir de circuit de poids maximum.

Proposition 5.11 *Avec les notations du théorème 5.1, si une série rationnelle α réalisée par un automate $\mathcal{A}$ est telle que $\mathcal{L}_{\overline{p}}$ est fini, elle est séquentielle.*

Démonstration. On pose $N_0 = \max \mathcal{L}_{\overline{p}}$ et $N = \max(N_0, n^2 + 2M(n^2+2)/\delta))$. Soit B le ppcm des longueurs des circuits de poids maximum.

D'après la proposition 5.7, pour tout entier k strictement supérieur à N,

$$\langle \alpha, k \rangle > \rho(k - n^2) - M(n^2 + 2). \tag{1}$$

On suppose qu'il existe un entier r supérieur à N tel qu'il existe un calcul victorieux de longueur k avec r transitions en dehors des circuits de poids maximum. On pose $s = k - r$.

Néanmoins, la partie du calcul hors des circuits de poids maximum contient elle aussi des circuits; la valeur de α en k est donc bornée:

$$\begin{aligned}\langle\alpha,k\rangle &\leqslant M(n+2)+(\rho-\delta)(r-n)+s\rho\\ &< M(n^2+2)+(\rho-\delta)(r-n^2)+s\rho\\ &< \rho(s+r-n^2)+\delta(n^2+2M(n^2+2)/\delta-r)-M(n^2+2)\\ &< \rho(k-n^2)-M(n^2+2)\end{aligned}$$

Ce qui est en contradiction avec l'inégalité (1). Donc, pour tout mot plus long que N, pour tout calcul victorieux, il y a moins de N transitions en dehors des circuits de poids maximum.

On montre maintenant que la série a une certaine périodicité, c'est-à-dire que, pour tout k supérieur à $N+Bn$, on a:

$$\langle\alpha,k+B\rangle = \langle\alpha,k\rangle + B\rho.$$

On montre cette égalité comme une double inégalité. D'une part, tout calcul victorieux de longueur k passe par un état p qui appartient à un circuit de poids maximum. En tournant suffisament autour de p, on obtient un calcul de longueur $k+B$ dont la valeur est $\langle\alpha,k\rangle + B\rho$.

Réciproquement, tout chemin victorieux de longueur $k+B$ contient des circuits de poids maximum de longueurs $l_1,..,l_k$ inférieures à n . On pose λ_i le nombre de circuits de longueurs l_i. Comme il y a au plus N transitions en dehors de ces circuits, on a:

$$\sum_i \lambda_i l_i \geqslant Bn,$$

Donc il existe i tel que $\lambda_i l_i \geqslant B$ et comme l_i divise B, il existe λ_i' tel que $\lambda_i' l_i = B$. En empruntant les circuits de longueur l_i seulement $\lambda_i - \lambda_i'$ fois, on obtient un calcul de longueur k dont la valeur est $\langle\alpha,k+B\rangle - B\rho$, ce qui montre l'inégalité dans l'autre sens. □

Proposition 5.12 *Une série α de $\mathbb{K}\mathrm{Rat}\,\mathbb{N}$ est séquentielle si, et seulement si, elle est uniformément divergente.*

Démonstration. Soit α une série uniformément divergente: Pour tout entier k de $\mathcal{L}_{\overline{\rho}}$,

$$\langle\alpha,k\rangle \leqslant M(n+2)+(\rho-\delta)k.$$

De la proposition 5.7, on obtient qu'il existe un entier d tel que, pour tout entier k de $\mathcal{L}_{\overline{\rho}}$, il existe un entier k' tel que $|k-k'| \leqslant d$ et

$$\langle\alpha,k'\rangle \geqslant \rho k' - M(4n+2).$$

Comme α est uniformément divergente, il existe η (dépendant uniquement de d) tel que:

$$\begin{aligned}\eta &\geqslant |\alpha,k'-\alpha,k|\\ &\geqslant \rho k' - M(4n+2) - M(n+2) - (\rho-\delta)k\\ &\geqslant \rho d - M(5n+4) + \delta k\end{aligned}$$

D'où

$$k \leqslant \frac{\eta + M(5n+4) - \rho d}{\delta}.$$

Donc $\mathcal{L}_{\overline{\rho}}$ est fini et α est séquentielle. □

Si l'automate est une composante fortement connexe, c'est-à-dire si la matrice de transition est *irréductible*, le langage $\mathcal{L}_{\overline{\rho}}$ est alors fini quels que soient les vecteurs initial et final. On se retrouve alors dans le cadre de l'application du théorème de « Perron-Frobenius $(\mathsf{max},+)$ » qui nous dit en effet que la matrice de transition a une seule valeur propre.

4 Algorithmes

4.1 Décidabilité

La décidabilité dépend uniquement de la finitude ou non du langage $\mathcal{L}_{\overline{\rho}}$. Il suffit donc d'identifier l'ensemble R des états appartenant à un circuit de poids maximum. On est ensuite ramené à un problème classique de théorie des automates.

Pour reconnaître $\mathcal{L}_{\overline{\rho}}$, on construit d'abord un automate qui reconnaît $\mathcal{L}_\rho$. On considère deux copies de l'automate $\mathcal{A}_0$ sous-jacent à l'automate à multiplicité $\mathcal{A}$.[5] La première copie conserve les états initiaux et les transitions, la seconde les états terminaux et les transitions. On ne peut passer de la première à la seconde que si l'on emprunte une transition qui permet de se rendre dans un état de R.

Formellement, la construction est la suivante. Soit $\mathcal{A}_0 = \langle\, Q,A,E,I,T \,\rangle$ l'automate sous-jacent de $\mathcal{A}$. On construit $\mathcal{A}_1 = \langle\, Q \times \{0;1\},A,F,J,U \,\rangle$ défini par :

$$\begin{aligned} J =& \{(p,0) \mid p \in I\} \\ U =& \{(p,1) \mid p \in T\} \\ F =& \{((p,i),a,(q,i)) \mid i \in \{0;1\},(p,a,q) \in E\} \\ & \cup \{((p,0),a,(q,1)) \mid (p,a,q) \in E, q \in R\}. \end{aligned}$$

On ne tient alors pas compte du mot vide, mais ce n'est pas nécessaire, puisque ceci ne change rien au caractère fini ou infini de $\mathcal{L}_{\overline{\rho}}$.

Après avoir émondé $\mathcal{A}_1$ qui reconnaît $\mathcal{L}_\rho$, on le déterminise et le complète, afin de calculer le complément de $\mathcal{L}_\rho$. On obtient l'automate $\mathcal{A}_2$ qui reconnaît $\overline{\mathcal{L}_\rho}$ Il suffit ensuite d'effectuer le produit de l'automate $\mathcal{A}_2$ par $\mathcal{A}_0$, pour obtenir un automate qui reconnaît $\mathcal{L}_{\overline{\rho}}$.

Cette construction est exponentielle en la taille de l'automate. L'étape de déterminisation a effectivement une complexité de $O(e^{\sqrt{n \ln n}})$ (M. Chrobak [15]). Toutefois, cet algorithme ne dépend aucunement de la taille des coefficients ou de leurs distances respectives.

Exemple 22.2 Soit α_{m_1} la série réalisée par $\mathcal{A}_{\mathsf{m}_1}$. On calcule dans un premier temps l'automate (booléen) qui accepte le langage correspondant aux calculs qui passent par des

5. Cette construction est celle de la preuve du « théorème des arcs colorés » qui montre que le langage des mots étiquetant les calculs qui empruntent un sous ensemble de transitions donné d'un automate est reconnaissable ([55]).

états du circuit de poids maximum. Le résultat est présenté figure 3. Seule la partie en traits pleins appartient à l'automate émondé. On doit maintenant calculer l'automate qui

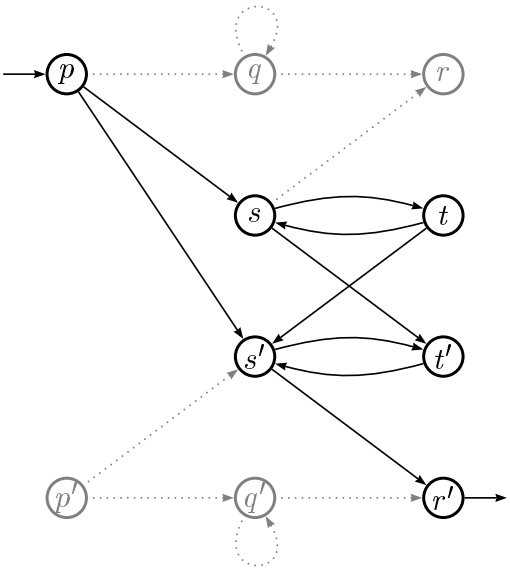


FIG. 3 – *L'automate qui reconnaît* $\mathcal{L}_\rho$.

accepte le complémentaire de ce langage. Pour cela, on déterminise l'automate puis on change les états non finals en états finals et inversement. On obtient l'automate représenté figure 4. Enfin, on calcule le produit avec l'automate sous-jacent de $\mathcal{A}_{\mathsf{m}_1}$ pour obtenir

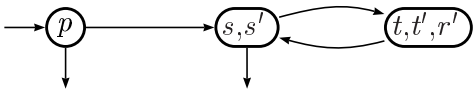


FIG. 4 – *L'automate minimal qui reconnaît* $A^* \setminus \mathcal{L}_\rho$.

l'automate qui reconnaît $\mathcal{L}_{\overline{p}}$ (figure 5). L'automate produit émondé n'est pas acyclique, $\mathcal{L}_{\overline{p}}$ n'est donc pas fini et α_{m_1} n'est donc pas séquentielle.

4.2 Déterminisation

Nous décrivons ici un algorithme de déterminisation qui dérive de la construction des sous-ensembles et qui est similaire à l'algorithme de déterminisation des transducteurs. Nous allons voir cependant qu'il faut prendre quelques précautions.

Pour les automates sans multiplicité, à partir d'une représentation linéaire d'un automate, (λ,μ,ν), calculer l'automate déterminisé revient à calculer l'ensemble des $\lambda \otimes (u\mu)$, où u est un mot. Comme cet ensemble est inclus dans $\mathbb{B}^Q$, il est fini.

Lorsque le semi-anneau a une infinité d'éléments, l'ensemble $\lambda \otimes \mu^n$ n'est *a priori* pas fini, même si α est séquentielle, c'est le même phénomène qui fait que les quotients d'une série séquentielle sont en nombre infini. Pour contourner ce problème, on définit le

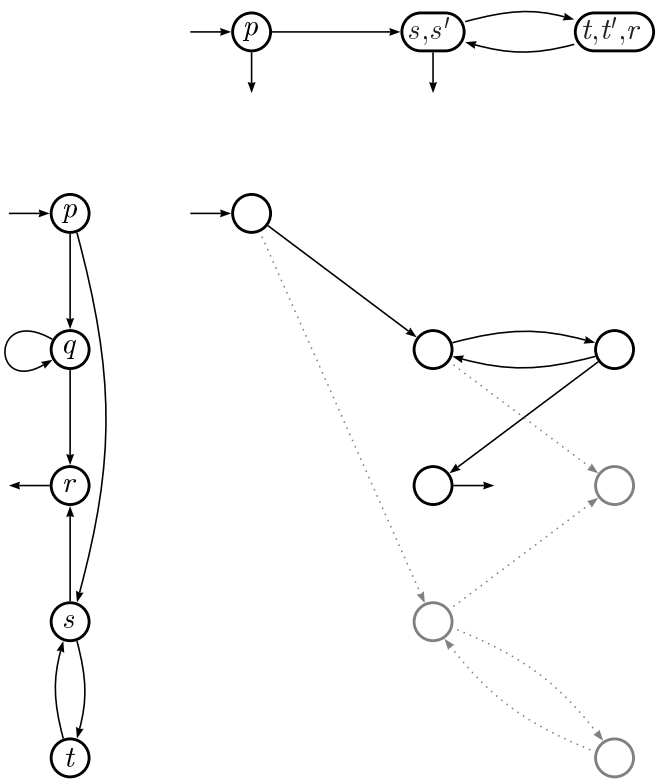


FIG. 5 – *L'automate qui reconnaît* $\mathcal{L}_{\overline{p}}$.

translaté d'un vecteur, de la même façon qu'on a défini la translatée d'une série.

DÉFINITION 5.6 *On suppose que Q est un ensemble fini ordonné. Pour tout vecteur γ de $\mathbb{K}_{\mathsf{m}}^{Q}$, on définit :*

$$\overset{\circ}{\gamma} = \begin{cases} \mathsf{min}\{\gamma_p \mid p \in \mathsf{Supp}(\gamma)\}, & \text{si } \mathbb{K} \text{ est positif,} \\ \mathsf{max}\{\gamma_p \mid p \in \mathsf{Supp}(\gamma)\}, & \text{si } \mathbb{K} \text{ est négatif,} \\ \gamma_p, \text{ avec } p = \mathsf{min}\,\mathsf{Supp}(\gamma), & \text{si } \mathbb{K} \text{ est un groupe.} \end{cases}$$

Le ***vecteur translaté*** *de γ est $\overline{\gamma} = \gamma - \overset{\circ}{\gamma}$.*

DÉFINITION 5.7 *Soit $\mathcal{A}$ un automate unaire dont les états forment l'ensemble Q et (λ,μ,ν) sa représentation linéaire. Soit $S = \{\overline{\lambda \otimes \mu^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$. Soit $\mathcal{B}$ l'automate déterministe décrit par la représentation (ζ,η,ϑ), où ζ et ϑ sont des vecteurs de $\mathbb{K}_{\mathsf{m}}^{S}$ et η une matrice de $\mathbb{K}_{\mathsf{m}}^{S\times S}$ définis par :*

$$\zeta_p = \begin{cases} \overset{\circ}{\lambda} & \text{si } p = \overline{\lambda}, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\vartheta_p = \mathsf{max}\{p_i + \nu_i \mid i \in Q\},$$

$$\eta_{p,q} = \begin{cases} \overset{\circ}{q} & \text{si } q = \overline{p \otimes \mu}, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

On peut montrer que cet automate réalise bien la même série que $\mathcal{A}$. Malheureusement, avec cette définition, l'ensemble Q peut ne pas être fini. Il faut donc modifier la définition de façon à obtenir un automate fini.

Pour cela, on réalise une partition de l'ensemble Q des états de l'automate $\mathcal{A}$ qu'on veut déterminiser. Soit R l'ensemble des états qui appartiennent à des circuits de poids maximum ρ. On scinde Q en deux parts :

- les éléments de R où leurs descendants : $\{p \mid \exists u \in a^*, p \in R \cdot u\}$;
- les autres éléments de Q qui forment un ensemble G.

Pour tout état p de la première catégorie, la fonction $n \mapsto (\lambda \otimes \mu^n)_p$ croît comme ρ^n, alors que les états de G prennent de plus en plus de « retard ». Si la fonction est séquentielle, tout chemin victorieux de $\mathcal{A}$ ne peut traverser les états de G que dans une première section de longueur bornée. On définit donc un filtre :

Définition 5.8 *Soit Q un ensemble fini et F un sous-ensemble de Q, pour tout vecteur γ de $\mathbb{K}_{\mathsf{m}}^Q$, on définit le vecteur $\gamma \smallsetminus F$ de $\mathbb{K}_{\mathsf{m}}^Q$ par :*

$$(\gamma \smallsetminus F)_p = \begin{cases} -\infty & \text{si } p \in F, \\ \gamma_p & \text{sinon.} \end{cases}$$

La définition de l'automate déterminisé est alors la suivante :

Définition 5.9 *Soit $\mathcal{A}$ un automate unaire dont les états forment l'ensemble Q de cardinal n et (λ,μ,ν) sa représentation linéaire. On calcule ρ et ρ_m les poids maximaux et minimaux des circuits élémentaires de $\mathcal{A}$, ainsi que M, valeur absolue maximale des coefficients de $\mathcal{A}$. On pose :*

$$\Delta = \rho(n^2 - 2n) - \rho_m(n^2 - n) + M(3n + 4).$$

On construit de façon incrémentale l'automate déterministe $\mathcal{D} = \langle R, \{a\}, \mathbb{K}, E, I, T \rangle$, où R est un sous-ensemble de $\mathbb{K}^Q$.

- *L'état initial est $\gamma_0 = \overline{\lambda}$ et $I_{\gamma_0} = \overset{\circ}{\lambda}$.*
- *Pour tout i, si i est inférieur à n^2 ou si $\mathsf{Supp}(\gamma_i \otimes \mu)$ est différent de $\mathsf{Supp}(\gamma_k)$ pour tout $k \leqslant i$, alors $\gamma_{i+1} = \overline{\gamma_i \otimes \mu}$ et $E_{(\gamma_i,a,\gamma_{i+1})} = \gamma_i \overset{\circ}{\otimes} \mu$. Sinon, on considère $\gamma = \gamma_i \otimes \mu$ et on calcule l'ensemble F de la façon suivante :*

$$F = \{p \in G \mid \mathsf{min}\{\gamma'_q - \gamma'_p \mid q \in Q \smallsetminus G\} \geqslant \Delta\}$$

  On pose alors $\gamma_{i+1} = \overline{\gamma \smallsetminus F}$ et $E_{(\gamma_i,a,\gamma_{i+1})} = \overset{\circ}{\overbrace{\gamma \smallsetminus F}}$.
- *Pour tout état γ_i, $T_{\gamma_i} = \gamma_i \otimes \nu$.*

Proposition 5.13 *Soit $\mathcal{A}$ un automate déterminisable. L'automate $\mathcal{D}$ défini dans la proposition précédente est un automate fini déterministe qui réalise la même série que $\mathcal{A}$.*

Démonstration. L'automate est fini car, ultimement, l'ensemble F est égal à l'ensemble G. Pour tout n supérieur à la borne N donnée dans la preuve de la proposition 5.11, les seules coordonnées non nulles du vecteur γ obtenu après lecture de a^n n'appartiennent pas à G, et, pour tout état p de $Q \setminus G$, pour tout k supérieur à $N + Bn$ (avec $n = \mathsf{Card}(Q)$), $(\lambda \otimes \mu^{k+B})_p = (\lambda \otimes \mu^k)_p + B\rho$. Donc l'automate contient au plus $N + Bn$ états.

Montrons qu'en supprimant des états comme nous le faisons, nous conservons les calculs victorieux qui correspondent à chaque mot. D'une part, comme l'automate est déterminisable, si on considère le déterminisé de l'automate sous-jacent, tout état final de la boucle du déterminisé contient un état de $Q \setminus G$. Supposons qu'on se trouve dans un état γ_i et que l'élément q de Q respecte les conditions pour être supprimé. Pour tout mot v dans le futur de q, tout chemin étiqueté par v qui va de q à un état final a pour valeur maximale $\rho(|v| - n) + (n+1)M$. La valeur du calcul d'un mot $u.v$ (avec $|u| = i$) qui emprunterait q après la lecture de u est donc au plus $(\gamma_i)_q + \rho(|v| - n) + (n+1)M$.

Tout élément p de $Q \setminus G$ qui appartient à γ_i satisfait $(\gamma_i)_p \leqslant \rho(i - n) + (n+1)M$. Et nous avons vu qu'il existe un tel élément au futur duquel appartient v. D'autre part, comme i est par hypothèse supérieur à n^2, nous avons vu que le mot $u.v$ étiquette un chemin qui a au plus n^2 arcs en dehors des circuits de poids maximal. Sa valeur est donc au moins $\rho(|u.v| - n^2) + \rho_m(n^2 - n) - (n+2)M$. On a donc :

$$\begin{aligned}
(\gamma_i)_q + \rho(|v| - n) + (n+1)M \leqslant & \rho(|u| - n) + (n+1)M - \Delta + \rho(|v| - n) + (n+1)M \\
\leqslant & \rho(|u.v| - 2n) + (2n+2)M - \Delta \\
\leqslant & \rho(|u.v| - 2n) + (2n+2)M \\
& - (\rho(n^2 - 2n) - \rho_m(n^2 - n) + M(3n+4)) \\
\leqslant & \rho(|u.v| - n^2) + \rho_m(n^2 - n) - (n+2)M
\end{aligned}$$

Le calcul victorieux pour $u.v$ ne passe donc pas par q après la lecture de u. Le mot $u.v$ sera donc accepté avec la même valeur qu'on enlève ou pas l'état p.

L'automate $\mathcal{D}$ réalise donc la même série que $\mathcal{A}$. En effet, pour tout vecteur γ, on a $\overline{\gamma \otimes \mu} = \overline{\overline{\gamma} \otimes \mu}$, donc, si (ζ,η,ϑ) est la représentation linéaire de $\mathcal{D}$, on a :

$$\begin{aligned}
\forall k, \zeta \otimes \eta^k \otimes \vartheta = & \overset{\circ}{\lambda} + \overline{\lambda} \overset{\circ}{\otimes} \mu + \overbrace{\overline{\lambda \otimes \mu} \otimes \mu}^{\circ} + \ldots + \overbrace{\overline{\lambda \otimes \mu^{k-2}} \otimes \mu}^{\circ} \\
& + \overbrace{\overline{\lambda \otimes \mu^{k-1}} \otimes \mu}^{\circ} + \mathsf{max}\{\overline{\lambda \otimes \mu^k}_i + \nu_i \mid i \in Q\} \\
= & \mathsf{max}\{\overset{\circ}{\lambda} + \lambda \overset{\circ}{\otimes} \mu + \ldots + \overbrace{\overline{\lambda \otimes \mu^{k-2}} \otimes \mu}^{\circ} \\
& + \overbrace{\overline{\lambda \otimes \mu^{k-1}} \otimes \mu}^{\circ} + (\overline{\overline{\lambda \otimes \mu^{k-1}} \otimes \mu})_i + \nu_i \mid i \in Q\} \\
= & \mathsf{max}\{\overset{\circ}{\lambda} + \lambda \overset{\circ}{\otimes} \mu + \ldots + \overbrace{\overline{\lambda \otimes \mu^{k-2}} \otimes \mu}^{\circ} + (\overline{\lambda \otimes \mu^{k-1}} \otimes \mu)_i + \nu_i \mid i \in Q\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\mathsf{max}\{\overset{\circ}{\lambda} + \lambda \overset{\circ}{\otimes} \mu + \ldots + \overbrace{\overline{\lambda \otimes \mu^{k-2}} \otimes \mu}^{\circ} + (\overline{\lambda \otimes \mu^{k-1}})_i \\
&\quad + (\mu \otimes \nu)_i \mid i \in Q\} \\
=&\mathsf{max}\{\overset{\circ}{\lambda} + \overline{\lambda}_i + (\mu^k \otimes \nu)_i \mid i \in Q\} \\
=&\mathsf{max}\{\lambda_i + (\mu^k \otimes \nu)_i \mid i \in Q\} \\
=&\lambda \otimes \mu^k \otimes \nu
\end{aligned}
$$

□

Remarque 5.3 Si $\mathbb{K}$ est positif ou négatif, on peut donner pour Δ une valeur plus petite :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{K} \geqslant 0,\ \Delta =& \rho(n^2 - 2n) - \rho_m(n^2 - n) + M(2n + 2), \\
\mathbb{K} \leqslant 0,\ \Delta =& \rho(n^2 - 2n) - \rho_m(n^2 - n) + M(n + 2).
\end{aligned}
$$

D'autre part, chaque fois qu'on a une raison pour décider qu'un état a pris trop de retard, on peut le supprimer, ce qui peut, dans bien des cas, diminuer la taille de l'automate obtenu.

5 Non-ambiguïté des séries rationnelles sur un alphabet à une lettre

Nous avons signalé qu'on peut décider de la séquentialité d'une série réalisée par un automate non ambigu. De fait, pour les alphabets unaires (le monoïde libre est alors isomorphe à $\mathbb{N}$), on a la propriété suivante, due à S. Gaubert [24] :

Proposition 5.14 *Toute série de* $\mathbb{K}_{\mathsf{m}}\mathrm{Rat}\,\mathbb{N}$ *peut être réalisée par un automate non ambigu.*

La preuve de cette proposition consiste à montrer que l'ensemble des séries qui sont des sommes finies disjointes de séries (séquentielles) de la forme :

$$
\langle \alpha, l \rangle = \begin{cases} x + ky & \text{si } \exists r,s,\ l = rk + s \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}
$$

est fermé sous les opérations rationnelles, c'est-à-dire qu'on peut appliquer la somme, le produit ou l'étoile de façon non ambiguë à de telles séries. Cette méthode pour obtenir une représentation non ambigué risque en pratique de mener à une explosion combinatoire.

Nous donnons ici une méthode de construction d'un automate non ambigu pour une série rationnelle de $\mathbb{K}_{\mathsf{m}}\mathrm{Rat}\,\mathbb{N}$ quelconque, inspirée par l'algorithme de déterminisation.

Définition 5.10 *Soit* $\mathcal{A} = \langle Q, A, \mathbb{K}_m, E, I, T \rangle$ *un automate avec multiplicité et* $\mathcal{B} = \langle R, A, F, J, U \rangle$ *un automate sans multiplicité sur le même alphabet. Le* ***produit avec***

multiplicité *de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{B}$ est l'automate correspondant à la représentation linéaire (λ,μ,ν) sur $Q \times R$, avec :*

$$\forall (i,j) \in Q \times R,\ \lambda_{i,j} = \begin{cases} I_i & \text{si } j \in J, \\ -\infty & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$\nu_{i,j} = \begin{cases} T_i & \text{si } j \in U, \\ -\infty & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$\forall a \in A, \forall (i,j),(i',j') \in Q \times R,\ (a\mu)_{(i,j),(i',j')} = \begin{cases} E_{(i,a,i')} & \text{si } (j,a,j') \in F, \\ -\infty & \text{sinon;} \end{cases}$$

Cet outil nous permet d'énoncer l'algorithme.

Soit α une série rationnelle réalisée par un automate émondé $\mathcal{A}$.

i) Si $\mathcal{A}$ est acyclique, le langage est fini et on peut facilement donner un automate non ambigu équivalent.

ii) Sinon, soit $\mathcal{L}_\rho$ l'ensemble des mots acceptés par $\mathcal{A}$ pour lesquels il existe un chemin qui emprunte un état d'un circuit de poids maximum ρ. On calcule le produit avec multiplicité de $\mathcal{A}$ par l'automate qui reconnaît $\mathcal{L}_\rho$. On obtient un automate qui réalise une série séquentielle qui coïncide avec α sur son support et qu'on peut déterminiser afin d'obtenir un automate non ambigu.

iii) On calcule à présent le produit avec multiplicité (émondé) de $\mathcal{A}$ avec l'automate qui reconnaît le complémentaire de $\mathcal{L}_\rho$ dans A^*. On obtient un automate $\mathcal{A}'$ qui réalise une série dont le support est disjoint de $\mathcal{L}_\rho$ et qui coïncide sur son support avec α. On applique l'algorithme à $\mathcal{A}'$.

Cet algorithme termine car l'ensemble des poids des circuits de $\mathcal{A}'$ est inclus dans celui des poids des circuits de $\mathcal{A}$, et cette inclusion est stricte, puisque qu'aucun circuit de $\mathcal{A}'$ n'a un poids égal ρ. Cet ensemble décroît donc jusqu'à ce qu'on obtienne un automate déterminisable, ce qui marque la fin de l'algorithme.

Il faut souligner que, contrairement au cas des transducteurs fonctionnels, la taille minimal d'un automate non ambigu équivalent à un automate $\mathcal{A}$ ne dépend pas uniquement de la structure de l'automate sous-jacent à $\mathcal{A}$, mais aussi des coefficients.

Exemple 22.3 Dans un premier temps, comme on l'a fait dans l'exemple 22.2, on calcule un automate qui reconnaît $\mathcal{L}_\rho$. En pratique, il peut être préférable de prendre l'automate minimal qui reconnaît ce langage. On calcule l'automate produit comme indiqué sur la figure 6. On calcule ensuite le déterminisé de l'automate obtenu. Dans ce cas précis, on sait quand on peut « abandonner » les états q ou q'. Le résultat est présenté figure 7. Ensuite on examine l'automate réalisant α_{m_1} sur le complémentaire de $\mathcal{L}_\rho$. Il est obtenu comme indiqué sur la figure 8. Comme cet automate n'a qu'un circuit, il réalise une série séquentielle et, de plus, aucun état ne peut prendre de retard important; on peut donc procéder à une déterminisation « classique » présentée figure 9. L'union des automates des figures 7 et 9 est un automate non ambigu qui réalise α_{m_1}.

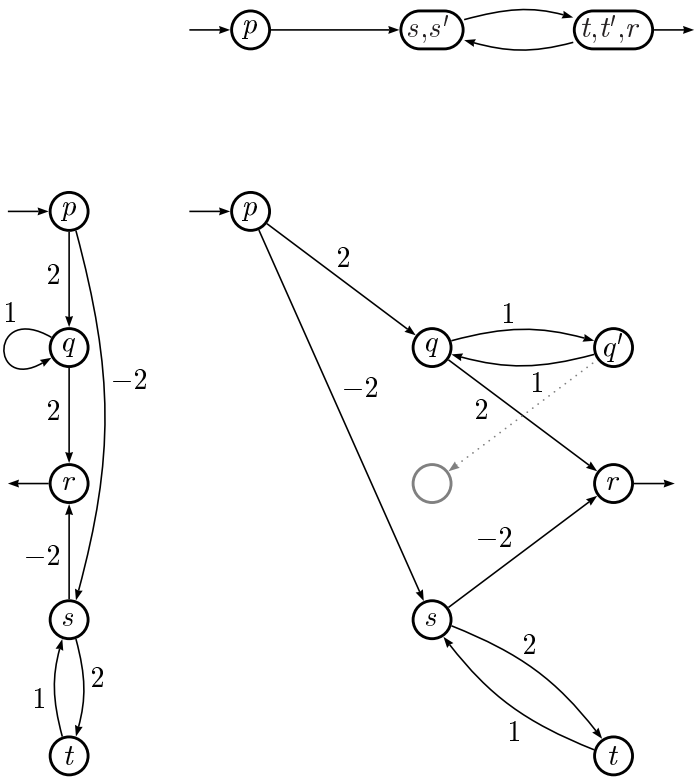


FIG. 6 – *Un automate qui réalise* α_{m_1} *sur* $\mathcal{L}_\rho$.

Calculons la taille minimale d'un automate non ambigu qui réalise α_{m_1}. Cette série vérifie :

$$\forall k > 0,\ \langle \alpha, 2k \rangle = \mathsf{max}(3k-7, 2k+2) \qquad \langle \alpha, 2k+1 \rangle = 2k+3.$$

Considérons un automate non ambigu qui réalise cette série. Examinons le calcul réussi de longueur 16. Sa valeur est 18. S'il existe un circuit de longueur l auquel appartient un des dix-sept états de ce calcul, (on peut supposer l pair, quitte à emprunter plusieurs fois le circuit), il existe un calcul de longueur $16+l$ dont la valeur est 18 plus la valeur M_l de ce circuit. En empruntant deux fois le circuit, on obtient un calcul de longueur $16+2l$ dont la valeur est $18+2M_l$, et comme la différence entre les coefficients de deux entiers pairs supérieurs à 18 qui diffèrent de l dans α est $3l/2$, on a $M_l = 3l/2$ et la valeur du calcul de longueur $16+l$ est $18+3l/2$, alors que $\langle \alpha_{\mathsf{m}_1}, 16+l \rangle = 17+3l/2$. Donc aucun des dix-sept états du calcul réussi de longueur 16 n'appartient à un circuit.

D'autre part, les valeurs des chemins de longueur paire et impaire ne croissent pas de la même façon, il existe donc au moins deux circuits disjoints de longueur au moins 2, soit quatre états de plus. Le plus petit automate non ambigu qui réalise α_{m_1} a donc au moins vingt-et-un états. Cette borne est atteinte. Le plus petit automate non ambigu qui réalise α_{m_1} est représenté figure 10. Il est assez facile de voir qu'en changeant seulement les coefficients de $\mathcal{A}_{\mathsf{m}_1}$, on peut réaliser des séries pour lesquelles la taille du plus petit automate non ambigu est arbitrairement grande.

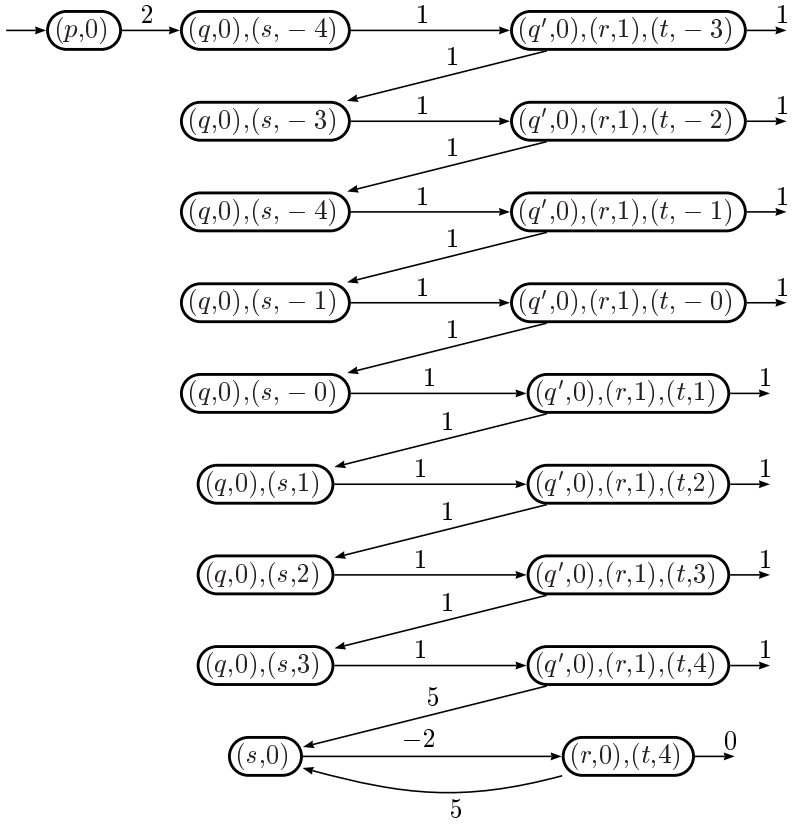


FIG. 7 – *Un automate déterministe qui réalise* α_{m_1} *sur* $\mathcal{L}_\rho$.

6 Automates univoques

Si l'alphabet a plusieurs lettres, le problème de la séquentialité et de la déterminisation reste ouvert. Toutefois, si l'opérateur max n'est pas utilisé, c'est-à-dire si chaque chemin réussi de l'automate considéré, étiqueté par un mot donné, a la même valeur on peut apporter une réponse. Ce cas correspond à celui des transducteurs fonctionnels, et nous allons voir qu'on peut étendre les techniques développées pour ceux-ci.

DÉFINITION 5.11 *Soit* $\mathcal{A}$ *un automate à multiplicité sur* $\mathbb{K}$. *On dit que* $\mathcal{A}$ *est* ***univoque*** *si, pour tout mot* u, *tous les chemins réussis de* $\mathcal{A}$ *étiquetés par* u *a la même valeur. Autrement dit, tout calcul est victorieux.*

REMARQUE 5.4 Les automates non ambigus sont évidemment univoques. D'ailleurs, on peut construire un automate non ambigu équivalent à un automate univoque donné[6]. De plus, la série réalisée par un tel automate est rationnelle non seulement sur $\mathbb{K}_{\mathsf{m}}$, mais aussi sur $\mathbb{K}_m$.

6. Cette construction est similaire à celle qu'on peut effectuer sur les transducteurs fonctionnels, mais nous allons voir qu'elle n'est pas nécessaire pour décider de la séquentialité.

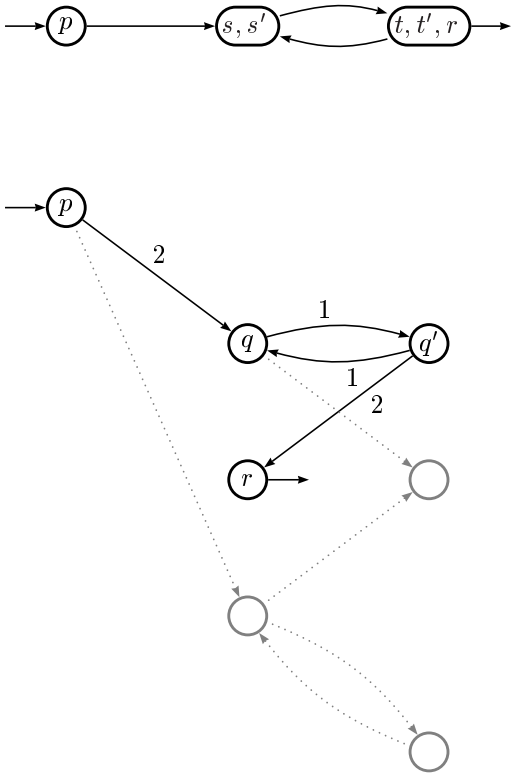


FIG. 8 – *Un automate qui réalise* α_{m_1} *sur* $\mathcal{L}_{\overline{\rho}}$.

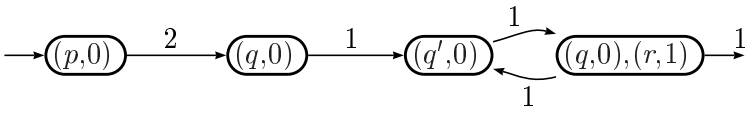


FIG. 9 – *Un automate déterministe qui réalise* α_{m_1} *sur* $\mathcal{L}_{\overline{\rho}}$.

Nous reprenons ici les algorithmes présentés en [5] pour les transducteurs, adaptés dans le cadre des automates (max,+).

PROPOSITION 5.15 *On peut décider si un automate* (max,+) *est univoque.*

Démonstration. Soit $\mathcal{A} = (Q,A,\mathbb{K},E,I,T)$ un automate et $\mathbb{G}$ le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ à partir duquel est construit $\mathbb{K}$. On construit l'automate

$$\mathcal{B} = \langle\, Q \times Q, A, (\mathcal{P}(\mathbb{G}), \cup, +), F, J, U \,\rangle$$

dont l'automate sous-jacent est le carré de l'automate sous-jacent de $\mathcal{A}$ et tel que :

$$\begin{aligned} J_{(p,q)} &= I_p - I_q \\ U_{(p,q)} &= T_p - T_q \\ F_{((p,q),a,(p',q'))} &= E_{(p,a,p')} - E_{(q,a,q')} \end{aligned}$$

Les valeurs de cet automate représentent l'avance (ou le retard) que l'on prend en suivant l'un ou l'autre des deux chemins de $\mathcal{A}$ qui correspondent à un chemin de $\mathcal{B}$. Soit (λ,μ,ν)

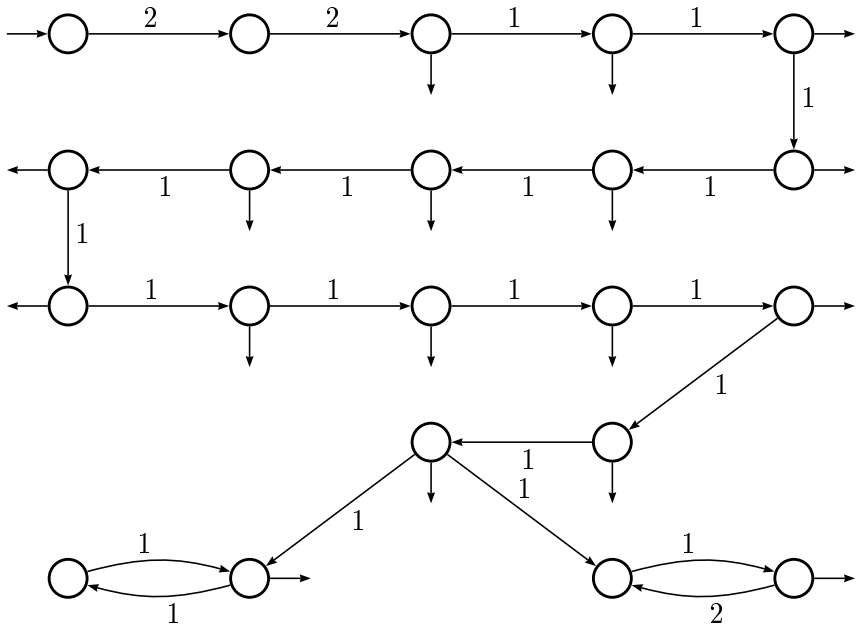


FIG. 10 – *Un automate non ambigu pour* α_{m_1}.

la représentation linéaire de $\mathcal{B}$. S'il existe un mot u tel que $\lambda \otimes u\mu \otimes \nu$ est différent de $\{0\}$, alors il existe un chemin réussi dans $\mathcal{B}$ étiqueté par u dont la valeur est non nulle. Les deux chemins réussis de $\mathcal{A}$ qui correspondent à ce chemin ont donc une valeur différente et $\mathcal{A}$ n'est pas univoque. Réciproquement, si $\lambda \otimes u\mu \otimes \nu = \{0\}$ pour tout mot u, tous les chemins étiquetés par un même mot ont la même valeur et l'automate $\mathcal{A}$ est univoque.

Comment vérifier que cette condition est satisfaite? Soit (p,q) un état de $\mathcal{B}$ et u et v deux mots du passé de (p,q). Si $(\lambda \otimes u\mu)_{(p,q)} \neq (\lambda \otimes v\mu)_{(p,q)}$, alors, pour tout mot w dans le futur de (p,q), $\lambda \otimes (u.w) \otimes \mu\nu$ ou $\lambda \otimes (v.w)\mu \otimes \nu$ est différent de $\{0\}$. Si $\mathcal{A}$ est univoque, on peut donc associer à tout état (p,q) la valeur $(p,q)\chi = (\lambda \otimes u\mu)_{(p,q)}$, pour u dans le passé de (p,q). La première partie de l'algorithme consiste donc en un parcours de l'automate à partir des états initiaux (pour lesquels $(p,q)\chi = J_{(p,q)}$) afin d'attribuer à chaque état sa valeur. S'il existe une contradiction, l'automate $\mathcal{A}$ n'est pas univoque.

La seconde partie de l'algorithme consiste à vérifier que pour tout état final (p,q), $(p,q)\chi + T_{(p,q)} = 0$. L'automate $\mathcal{A}$ est alors univoque si et seulement si cette condition est satisfaite. □

On retrouve dans ce cadre les caractérisations habituelles:

PROPOSITION 5.16 *Soit α une série réalisée par un automate univoque. Alors α est séquentielle si et seulement si elle est à variations bornées.*

LEMME 5.17 *Soit $\mathcal{A}$ un automate avec n états. Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux chemins étiquetés par le même mot u de longueur supérieure à n^2. Alors il existe une factorisation de u en $x.v.y$ telle que la portion de chemin étiquetée par v est une boucle dans $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.*

Démonstration. Il suffit de considérer l'automate $\mathcal{B}$, carré de $\mathcal{A}$. Il existe un chemin qui est le produit de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{C}_2$. Comme $\mathcal{B}$ a seulement n^2 états, ce chemin comporte une boucle qui correspond à une boucle dans $\mathcal{C}_1$ et une boucle dans $\mathcal{C}_2$. □

Démonstration de la proposition. Soit $\mathcal{A}$ un automate univoque et émondé et (λ,μ,ν) la représentation correspondante. On pose n le nombre d'états de l'automate. On suppose que la série réalisé par $\mathcal{A}$ est uniformément bornée. Il existe donc k tel que :

$$\forall u,v \in A^*,\ d_{\mathsf{pref}}(u,v) \leqslant 2n \Longrightarrow |\langle \alpha,u\rangle - \langle \alpha,v\rangle| \leqslant k$$

On veut montrer que α est séquentielle, ce qui revient à montrer qu'elle a un nombre fini de translatées. Remarquons que si, pour deux mots u et v,

$$\overline{\lambda \otimes u\mu} = \overline{\lambda \otimes v\mu},$$

alors les translatées de α selon u et v sont égales. On va donc montrer que si la série est uniformément divergente et réalisée de façon univoque, l'ensemble $\{\overline{\lambda \otimes u\mu} \mid u \in A^*\}$ est fini.

Pour tout couple (p,q) de Q^2, on considère l'ensemble $C_{p,q}$ des mots u tels que $(\overline{\lambda \otimes u\mu})_p$ et $(\overline{\lambda \otimes u\mu})_q$ sont différents de $-\infty$. Pour tout u appartenant à $C_{p,q}$ de longueur supérieure à n^2, on considère un chemin $\mathcal{C}_p$ (*resp.* $\mathcal{C}_q$) d'un état initial i_1 à l'état p (*resp.* de i_2 initial à q) étiqueté par u. Il existe une factorisation de u en $x.v.y$ telle que v étiquette une boucle dans chacun des chemins $\mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}_q$. Si ces deux boucles ont une valeur qui diffère de $r \neq 0$, en prenant h suffisament grand, on obtient que $(\overline{\lambda \otimes (x.v^h.y)\mu})_p$ et $(\overline{\lambda \otimes (x.v^h.y)\mu})_q$ diffèrent de plus de $k + (2n+2)M$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse de divergence uniforme. Donc les deux boucles ont même valeur et $(\overline{\lambda \otimes u\mu})_p - (\overline{\lambda \otimes u\mu})_q = (\overline{\lambda \otimes (x.y)\mu})_p - (\overline{\lambda \otimes (x.y)\mu})_q$. Donc pour tout u de $C_{p,q}$, il existe v dans $C_{p,q}$ de longueur inférieure à n^2 telle que la différence entre les coordonnées p et q est la même dans $\overline{\lambda \otimes u\mu}$ et $\overline{\lambda \otimes v\mu}$. Il y a donc un nombre fini de différences possibles entre ces deux coordonnées. Ceci est vrai pour tout couple; et comme, de plus, une des coordonnée de $\overline{\lambda \otimes u\mu}$ est nulle pour tout u, l'ensemble $\{\overline{\lambda \otimes u\mu} \mid u \in A^*\}$ est fini. □

L'argument employé dans cette preuve n'est ni plus ni moins que la « twinning property » (*cf.* [14]). C'est elle que l'on va tester pour décider la séquentialité.

PROPOSITION 5.18 *Soit $\mathcal{A}$ un automate univoque. On peut décider si $\mathcal{A}$ est déterminisable.*

Démonstration. Pour décider si un automate émondé $\mathcal{A}$ est déterminisable, on considère à nouveau l'automate $\mathcal{B}$ défini dans la preuve de la proposition 5.15. Cette fois, en revanche, on ne considère plus la partie émondée, mais la partie accessible de $\mathcal{B}$. On teste que la valeur de chaque circuit élémentaire de $\mathcal{B}$ est nulle. La fonction réalisée par $\mathcal{A}$ est séquentielle si et seulement si cette condition est satisfaite. Noter que sur la partie émondée de l'automate $\mathcal{B}$, cette condition est une conséquence du caractère univoque de $\mathcal{A}$.

Supposons qu'un circuit de $\mathcal{B}$ a une valeur non nulle. Soit (p,q) un état de ce circuit, u un mot du passé de (p,q) et v un mot qui étiquette le circuit (de valeur non nulle) autour de p.

Alors, si (λ,μ,ν) est la représentation linéaire de $\mathcal{A}$, pour k suffisament grand, la différence entre $(\lambda \otimes (u.v^k)\mu)_p$ et $(\lambda \otimes (u.v^k)\mu)_q$ peut être arbitrairement grande, ce qui, on l'a vu, contredit la divergence uniforme et donc la séquentialité de la série réalisée par $\mathcal{A}$.

Réciproquement, si tous les circuits de $\mathcal{B}$ ont une valeur nulle, quel que soit le mot u, si la longueur de u est supérieure à n^2 et que les coordonnés p et q de $\lambda \otimes u\mu$ sont non nulles, il existe un chemin d'un état initial de $\mathcal{B}$ à (p,q). Ce chemin comprend une boucle étiquetée par v (on pose x et y tels que $u = x.v.y$). Alors la distance entre les coordonnées p et q de $\lambda \otimes u\mu$ est la même qu'entre les coordonnées p et q de $\lambda \otimes (x.y)\mu$. La distance entre les coordonnées des vecteurs $\lambda \otimes u\mu$, pour u dans A^* est donc bornées par celle des coordonnées des vecteurs correspondant aux mots de longueur inférieure à n^2; la série réalisée est donc uniformément divergente et donc séquentielle. □

La déterminisation se fait alors tout simplement en calculant les vecteurs $\{\overline{\lambda \otimes u\mu} \mid u \in A^*\}$, de même que la construction pour les automates sans multiplicité.

Proposition 5.19 *Soit $\mathcal{A}$ un automate univoque déterminisable et (λ,μ,ν) sa représentation linéaire. Soit $\mathcal{D}$ l'automate, dont les états sont $\{\overline{\lambda \otimes u\mu} \mid u \in A^*\}$, et qui est défini par sa représentation linéaire (ζ,η,ϑ) :*

$$\zeta_p = \begin{cases} \overset{\circ}{\lambda} & \text{si } p = \overline{\lambda}, \\ -\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$\vartheta_p = p \otimes \nu,$$

$$\forall a \in A,\ (a\eta)_{p,q} = \begin{cases} p \overset{\circ}{\otimes} a\mu & \text{si } q = \overline{p \otimes a\mu}, \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, l'automate $\mathcal{D}$ est un automate fini déterministe équivalent à $\mathcal{A}$. Il s'agit du ***déterminisé*** *de $\mathcal{A}$.*

Cet automate est clairement déterministe. Il est fini (on a montré que l'ensemble $\{\overline{\lambda \otimes u\mu} \mid u \in A^*\}$ est fini). Il réalise la même série que $\mathcal{A}$; on peut le montrer en suivant exactement la même preuve que celle de la proposition 5.13.

— ∘ —

7 Le cas général

Le cas général paraît beaucoup plus difficile à traiter. S. Gaubert a montré[7] que décider la séquentialité permet de répondre au problème de la limitation. Nous présentons ici ce problème ainsi que le résultat de S. Gaubert sans donner de preuve.

Soit α une série rationnelle de $\mathbb{K}_{\mathsf{m}}\mathrm{Rat}\, A^*$ donnée par un automate ou une représentation linéaire. On veut savoir si la série α est **limitée**, c'est-à-dire si l'ensemble $\{\langle \alpha,u \rangle \mid u \in A^*\}$ est fini[8].

7. Communication personnelle basée sur des résultats de [25].

8. On peut montrer (*cf.* [25]) que cette condition est équivalente à dire que les coefficients de α sont bornés.

Ce problème difficile (qui intervient dans l'approche de K. Hashiguchi du problème de la hauteur d'étoile) a été résolu sur $\mathbb{N}_m$ par K. Hashiguchi [32, 34] et étudié par I. Simon [58, 60] et H. Leung [41]. Il a été étendu à $\mathbb{R}_{\max}$ par S. Gaubert [25].

PROPOSITION 5.20 *Soit α une série rationnelle de $\mathbb{K}_{\max}\mathrm{Rat}\, A^*$. Soit b une lettre n'appartenant pas à A on définit la série β de $\mathbb{K}_{\max}\mathrm{Rat}\,(A \cup \{b\})^*$ par :*

$$\begin{aligned} \forall u \in A^*, \langle \beta, u \rangle &= \langle \alpha, u \rangle \\ \langle \beta, u.b \rangle &= 0 \\ \forall u \notin A^*(1+b), \langle \beta, u \rangle &= -\infty \end{aligned}$$

α est limitée si et seulement si β est séquentielle.

Ceci montre que décider la séquentialité est « plus difficile » que décider la limitation.

— ∘ —

8 Problème de la généralisation à d'autres semi-anneaux

Tout ce que nous avons fait dans ce chapitre s'appuie sur la notion de translatée. Celle-ci n'est fondée que si le semi-anneau considéré est principal. Par exemple, on ne peut pas étendre cette notion à $(\mathcal{P}(B^*), \cup, .)$. Le problème de la séquentialisation des transducteurs (même sur un alphabet unaire en entrée) reste posé pour les transducteurs non fonctionnels.

— ∘ —

Table des exemples

1 Le langage $\mathcal{L}_1 = A^*abA^*$ 21

1.1 Un graphe orienté . . . 21
1.2 Le monoïde fini M_1 . . . 22
1.3 Langage rationnel . . . 30
1.4 Langage reconnaissable . . . 31
1.5 Automate reconnaissant $\mathcal{L}_1$ . . . 35
1.6 Langage reconnu par un automate . . . 36
1.7 Factorisations de $\mathcal{L}_1$ . . . 46
1.8 Automate universel de $\mathcal{L}_1$ . . . 48
1.9 L'automate universel de $\mathcal{L}_1$ est reconnaissable . . . 51
1.10 Automate A-universel de $\mathcal{L}_1$ . . . 54
1.11 Écorché de l'automate universel de $\mathcal{L}_1$ . . . 61
1.12 Développé d'un automate reconnaissant $\mathcal{L}_1$ . . . 66
1.13 Ecorché du développé . . . 70

2 Distance préfixe 25

3 Le semi-anneau $\mathbb{N}$ 25

4 Le semi-anneau de Boole 26

5 Semi-anneaux principaux 26

6 Etoile de 1/2 27

7 Langages reconnus par la partie $\{1,2\}$ de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ 31

7.1 Langage reconnaissable . . . 31
7.2 Factorisations de $\mathcal{L}_3 = \{1,2\}$ dans le monoïde $N_2 = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ . . . 46
7.3 Automate universel du langage $\mathcal{L}_3$ . . . 48
7.4 Factorisations du langage $\mathcal{L}_3' = \{u \in A^* \mid |u|_a \neq |u|_b \mod 3\}$ . . . 52

7.5 Automate {1}-universel de $\mathcal{L}_3$ 53
7.6 Automate universel du langage $\mathcal{L}_3'$ 55
7.7 Écorché de l'automate {1}-universel du langage $\mathcal{L}_3$ 61

8 Le langage $\mathcal{L}_2 = a^+$ 47
8.1 Factorisations du langage $\mathcal{L}_2 = a^+$ dans le monoïde a^* 47
8.2 Automate universel du langage $\mathcal{L}_2$ 48
8.3 Automate $\{a\}$-universel du langage $\mathcal{L}_2$ 53
8.4 Écorché de l'automate universel du langage $\mathcal{L}_2$ 61
8.5 Développé de l'automate minimal du langage $\mathcal{L}_2$ 66

9 Factorisations d'un langage non reconnaissable 47

10 Le langage $\mathcal{L}_4 = ((a+c)(b+c)+(b+(a+c)a)b^*(a+c))^*(b+(a+c)a)$ sur A^* 59
10.1 Calcul de l'automate universel 59
10.2 Ecorché de l'automate universel de $\mathcal{L}_4$ 61
10.3 Un automate d'enlacement minimal pour $\mathcal{L}_4$ 120

11 Ordre sur $\mathcal{P}(Q)$ 64

12 Le langage $\mathcal{L}_{r_1}$ sur A^* (Langage réversible) 71
12.1 Automate réversible $\mathcal{A}_{r_1}$ et développé de $\mathcal{A}_{r_1}$ 71
12.2 Profil des états du développé de $\mathcal{A}_{r_1}$ 86
12.3 Automate universel de $\mathcal{L}_{r_1}$ 87
12.4 Un automate quasi-réversible de $\mathcal{L}_{r_1}$ 119

13 Automate réversible 77

14 Automate minimal et universel de $\mathcal{L}_{g_1}$ (Langage à groupe) 81

15 Le langage $\mathcal{L}_{g_2}$ sur A^* (Langage à groupe) 81
15.1 Automate minimal et universel de $\mathcal{L}_{g_2}$ 81
15.2 Hauteur d'étoile de $\mathcal{L}_{g_2}$ 113

16 Construction d'un automate réversible 94

17 Enlacement d'un graphe 100

18 Morphismes conforme et non conforme 102

19 Indice i_{E} **105**

20 Automate sur $\mathbb{N}_{\mathsf{m}}$ avec valeur minimale éloignée **126**

21 Une série non-séquentielle uniformément bornée **129**

22 L'automate unaire avec multiplicité $\mathcal{A}_{\mathsf{m}_1}$ **130**

22.1 Les paramètres de $\mathcal{A}_{\mathsf{m}_1}$ 130

22.2 Décision de la séquentialité de α_{m_1} 135

22.3 Calcul d'un automate non ambigu pour α_{m_1} 141

23 Fréquence des circuits de poids maximum **133**

24 $\mathsf{E}_4 = (\mathbf{x}(a\cdot(\mathbf{y}\,b)^\star\cdot a)\,\mathbf{y}+\mathbf{y}\,(b\cdot(a\,\mathbf{x})^\star\cdot b)\,\mathbf{x})^\star$ **151**

24.1 Présentation de l'expression 151

24.2 Arbre de l'expression E_4 154

24.3 Automate de l'expression E_4 155

24.4 Dérivation unitaire 170

25 $\mathsf{E}_1 = (\frac{1}{6}a^* + \frac{1}{3}b^*)^*$ **153**

25.1 Terme constant de E_1 153

25.2 Dérivées de E_1 160

25.3 Termes dérivés 162

26 $\mathsf{E}_2 = (a\,b\,a + (a\,(a - b\,a)))$ **153**

26.1 Ecriture de E_2 153

26.2 Dérivées de E_2 161

26.3 Termes dérivés fantômes 163

27 $\mathsf{E}_3 = 5\,((2\,a\,b) + ((3\,b)\cdot(4\,(a\,b)^\star)))^\star$ **151**

27.1 Terme constant de E_3 151

27.2 Dérivation et dérivation unitaire 171

28 Problème sur les termes dérivés fantômes **168**

Index

action, 23
alphabet, 23
automate
    quasi-réversible, 77
    à groupe, 80
    à multiplicité, 41
    complet, 36
    déterminisé d'un automate, 38
    déterministe, co-déterministe, 36
    des termes dérivés, 166
    émondé, 36
    généralisé, 104
    non-ambigu, 34
    normalisé, 32
    réversible, 76
    sous-jacent, 42
    sur un alphabet, 35
    sur un monoïde, 33
    sur un semi-anneau, 31
    universel, 48
    univoque, 144
automates équivalents, 32

boucle, 20

cône, 28
calcul, 36
    victorieux, 125
carré d'un automate, 41
chemin, 20
circuit (élémentaire), 20
composante fortement connexe, 21
corde, 90

dérivée
    cassante, 171
    unitaire, 169
dérivée d'une expression
    par rapport à un mot, 158
    par rapport à une lettre, 157
développé d'un automate, 66
distance préfixe, 24

écorché
    de l'automate universel, 60
    du développé, 70
enlacement
    d'un automate, 104
    d'un graphe orienté, 100
ensembles rationnels, 30
étage de l'automate universel
    d'un langage à groupe, 80
    d'un langage réversible, 86
état accessible, 36
étoile, 27
expression rationnelle, 98
    à multiplicité, 150
    réduite, 154
    valide, 152
expressions équivalentes, 152

facteur, 24, 46
factorisation, 46
    initiale, terminale, 49
fonction de production, 44

graphe
    acyclique, 21
    connexe, 21
    critique, 130
    de Cayley, 22
    fortement connexe, 21
    orienté, 20
    sous-jacent à un automate, 32

hauteur d'étoile

d'un langage rationnel, 99
d'une expression rationnelle, 99

idempotent, 25
image miroir, 24
indice i_E d'un automate généralisé, 105

langage, 23
à groupe, 80
réversible, 76
rationnel, 30
reconnaissable, 31
reconnu par un automate, 36
lettres, 23
longueur d'une expression, 151

monoïde, 21
de transition, 37
libre, 23
syntaxique, 41
morphisme
conforme, 102
de graphes, 21
syntaxque, 41
mot idempotent pour un automate, 114
mots, 23

ordre
lexicographique, 24
radiciel, 24

partie propre d'une série, 29
passé/futur d'un état, 34
pelote, 21
poids d'un circuit, 130
polynôme, 29
polynômes d'expressions, 156
préfixe, 24
produit de deux automates, 41
profondeur d'une expression, 151

quipu, 90
quotient à gauche
d'une série, 30
dans un monoïde, 22

rationnel, 27
relation, 20
représentation linéaire, 37

semi-anneau, 25
idempotent, 25
positif, 167
principal, 26
semi-module, 28
séries, 28
rationnelles, 30
séquentielles, 43
sous-factorisation, 46
sous-graphe, 20
suffixe, 24
support, 20
support d'une série, 29

terme constant
d'une expression rationnelle, 152
d'une série, 29
termes dérivés
d'une expression, 162
fantômes, 163
transducteurs, 44
transitions, 32, 35
transitions spontanées, 36
translatée, 126
transposé d'un automate, 41
type fini, 28

uniformément divergente, 128

vecteur translaté, 137

Bibliographie

[1] A. Ambainis et R. Freivalds, 1-way quantum finite automata: strengths, weaknesses and generalizations. In *39th Ann. Symposium on FOCS* (1998), 332–342.

[2] D. Angluin, Inference of reversible languages. *J. of the ACM* **29** (1982), 741–765.

[3] V. Antimirov, Partial derivatives of regular expressions and finite automaton constructions. *Theoret. Comput. Sci.* **155** (1996), 291–319.

[4] A. Arnold, A. Dicky, et M. Nivat, A note about minimal non-deterministic automata. *Bull ot the EATCS* **47** (1992), 166–169.

[5] M.-P. Béal, O. Carton, C. Prieur, et J. Sakarovitch, Squaring transducers. *Proc. of Latin 2000, Lect. Notes in Comp. Sci.* **1776** (2000), 397–406.

[6] G. Berry et R. Sethi, From regular expressions to deterministic automata, *Theoret. Comput. Sci.* **48** (1986), 117–126.

[7] J. Berstel et J.-E. Pin, Local languages and the Berry-Sethi algorithm, *Theoret. Comput. Sci.* **155** (1996), 439–446.

[8] J. Berstel et Ch. Reutenauer, *Les séries rationnelles et leurs langages.* Masson, 1984. Traduction: *Rational Series and their Languages.* Springer, 1986.

[9] J. A. Brzozowski, Derivatives of regular expressions. *J. Assoc. Comput. Mach.* **11** (1964), 481–494.

[10] A. Buchsbaum, R. Giancarlo, et J. Westbrook, On the Determinization of Weighted Finite Automata. *Proc. of ICALP'98, Lect. Notes in Comp. Sci.* **1443** (1998), 482–493.

[11] P. Caron et M. Flouret, Glushkov construction for multiplicities. *Pre-Proceedings of CIAA'00*, M. Daley, M. Eramian and S. Yu, eds, Univ. of Western Ontario, (2000), 52–61.

[12] O. Carton, Factorisations et matrice des facteurs. Manuscrit (1994).

[13] J.-M. Champarnaud et D. Ziadi, New finite automaton constructions based on canonical derivatives. *Pre-Proceedings of CIAA'00*, M. Daley, M. Eramian and S. Yu, eds, Univ. of Western Ontario, (2000), 36–43.

[14] Ch. Choffrut, Une caractérisation des fonctions séquentielles et des fonctions sous-séquentielles en tant que relations rationnelles. *Theoret. Comput. Sci.* **5** (1977), 325–337.

[15] M. Chrobak, Finite Automata and Unary Languages. *Theoret. Comput. Sci.* **47** (1986), 149–158.

[16] G. Cohen, P. Moller, J.-P. Quadrat, et M. Viot, Algebraic Tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems. *IEEE Proc.: Special issue on D.E.S.* **77.1** (1989).

[17] R. Cohen, Star height of certain families of regular events. *J. Computer System Sci.* **4** (1970), 281–297.

[18] R. Cohen et J. A. Brzozowski, General properties of star height of regular events. *J. Computer System Sci.* **4** (1970), 260–280.

[19] J. H. Conway, *Regular algebra and finite machines.* Chapman and Hall, 1971.

[20] B. Courcelle, D. Niwinski, A. Podelski, A geometrical view of the dererminization ond minimization of finite-state automata. *Math. Systems Theory* **24** (1991), 117–146.

[21] F. Dejean et M.-P. Schützenberger, On a question of Eggan. *Inform. and Control* **9** (1966), 23–25.

[22] L. C. Eggan, Transition graphs and the star-height of regular events. *Michigan Mathematical J.* **10** (1963), 385–397.

[23] S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines, volume A.* Academic Press, 1974.

[24] S. Gaubert, Rational Series over Dioids and Discrete Event Systems. *Proc. of the 11th Conf. on Anal. and Opt. of Systems, Lect. Notes in Contr. and Inf. Sci.* **199** (1994).

[25] S. Gaubert, On the Burnside problem for Semigroups of Matrices in the (max,+) Algebra. *Semigroup Forum* **52** (1996), 271–292.

[26] S. Gaubert, Methods and applications of (max,+) linear algebra. *rapport de recherche INRIA* **3088** (1997).

[27] V. Glushkov, The abstract theory of automata. *Russian Mathematical Surveys 16* (1961), 1–53.

[28] Ch. Hagenah et A. Muscholl, Computing ε-Free NFA from regular expressions in $O(n \log^2(n))$ time. *R.A.I.R.O. Inf. Théorique* **34**, (2000), 257–277.

[29] T.E. Hall, Biprefix codes, inverse semigroups and syntactic monoids of injective automata. *Theoret. Comput. Sci.* **32** (1984), 201–213.

[30] T. Harju et J. Karhumäki, The equivalence problem of multitape finite automata. *Theoret. Comput. Sci.* **78** (1991), 347–355.

[31] K. Hashiguchi et N. Honda, The star height of reset-free events and strictly locally testable events. *Inform. and Control* **40** (1979), 267–284.

[32] K. Hashiguchi, Limitedness theorem on finite automata with distance functions. *J. of Comput. Syst. Sci.* **24** (1982), 233–244.

[33] K. Hashiguchi, Algorithms for determining relative star height and star height. *Inform. and Computation* **78** (1988), 124–169.

[34] K. Hashiguchi, Improved limitedness theorem on finite automata with distance functions. *Theoret. Comput. Sci.* **72** (1990), 27–38.

[35] P.-C. Héam, A lower bound for reversible automata. *Theoret. Informatics Appl.* **34** (2000), 331–341.

[36] P.-C. Héam, Contribution à l'algorithmique des automates : complexité et aspects topologiques. *Thèse de doctorat*, Université Paris 7, 2001.

[37] J. Hromkovič, S. Seibert, et T. Wilke, Translating regular expressions into small ε-free nondeterministic finite automata. *Proc. of STACS'97, Lect. Notes in Comp. Sci.* **1200** (1997), 55–66.

[38] D. Krob, Differentiation of K-rational expressions. *Int. J. of Algebra and Computation 2* (1992), 57–87.

[39] W. Kuich et A. Salomaa, *Semirings, Automata, Languages.* Springer, 1986.

[40] G. Lallement, *Semigroups and combinatorial applications.* Wiley, 1979.

[41] H. Leung, Limitedness theorem on finite automata with distance functions: an algebraic proof *Theoret. Comput. Sci.* **81** (1991), 137–145.

[42] S. Lombardy et J. Sakarovitch, On the star height of rational languages, a new presentation for two old results *Proc. of 3rd ICLWC, Kyoto* (2000) (M. Ito, ed.), World Scientific, *à paraître.*

[43] S. Lombardy et J. Sakarovitch, Star height of reversible languages and universal automata, *accepté à Latin'02.*

[44] S. Lombardy, Sequentialization and unambiguity of (max, +) rational series over one letter. *Pre-Proc. of Workshop on Max-plus algebra, Prague* (2001) (S. Gaubert, ed.).

[45] O. Matz et A. Potthoff, Computing small nondeterministic finite automata. *proc. of TACAS'95, BRICS Notes Series* (1995), 74–88.

[46] R. McNaughton et H. Yamada, Regular expressions and state graphs for automata. *IRE Trans. on electronic computers* **9** (1960), 39–47.

[47] R. McNaughton, The loop complexity of pure-group events. *Inform. and Control* **11** (1967), 167–176.

[48] Moebius, *Sur l'étoile.* Gentiane, 1983, Rééd. Casterman, 1990.

[49] M. Mohri, Finite-State Transducers in Language and Speech Processing. *Computat. Ling.* **23.2** (1997), 269–311.

[50] C. Nicaud, Étude du comportement en moyenne des automates finis et des langages rationnels. *Thèse de doctorat*, Université Paris 7, 2000.

[51] J.-E. Pin, On reversible automata. In *Proc. 1st LATIN Conf., (I. Simon, Ed.), Lecture Notes in Comput. Sci.* **583** (1992), 401–416.

[52] J.-E. Pin, Variétés de langages formels. Masson, 1984. Traduction: *Varieties of formal languages* North Oxford Acad. Pub., 1986.

[53] G. Raney, Sequential functions. *J. Assoc. Comput. Mach.* **5** (1958) 177–180.

[54] J. Sakarovitch, A construction on automata that has remained hidden. *Theoret. Comput. Sci.* **204** (1998), 205–231.

[55] J. Sakarovitch, *Éléments de théorie des automates.* Vuibert, *à paraître.*

[56] A. Salomaa, *Jewels of formal language theory.* Computer Science Press, 1981.

[57] P.V. Silva, On free inverse monoid languages. *Theoret. Informatics and Appl.* **30** (1996), 349–378.

[58] I. Simon, Recognizable sets with multiplicities in the tropical semiring. *Proc. of MFCS'88, Lect. Notes in Comp. Sci.* **324** (1988), 107–120.

[59] I. Simon, The non deterministic complexity of a finite automaton. *Mots (M. Lothaire)*, Hermès (1990) 384–400.

[60] I. Simon, On semigroups of matrices over the tropical semiring. *R.A.I.R.O. Inf. Théorique*, (1994), 277–294.

[61] N.J.A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences.* `http://www.research.att.com/~njas/sequences/`

[62] J.B. Stephen, Presentations of inverse monoids. *J. Pure Appl. Alg.* **63** (1990), 81–112.

[63] M. Szalay, On the maximal order in S_n and S_n^*. *Acta arithm.* **37** (1980), 321–331.