**Université Gustave Eiffel**
**Licence d'Informatique L3**
**Mathématiques pour l'Informatique 4**

# TP noté – Janvier 2025

Durée: 2 heures

*On rendra une copie donnant les réponses aux questions*
*et expliquant comment elles ont été obtenues*
*Les programmes devront être accompagnés d'exemples de leur exécution*

**Exercice 1.** Pour chacune des suites récurrentes suivantes :
a) $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n + (-1)^n$, $u_0 = 1$, $u_1 = 2$.
b) $v_{n+3} = 3v_{n+2} - 3v_{n+1} + v_n$, $v_0 = 1$, $v_1 = 0$, $v_2 = -1$
1) Calculer les 10 premiers termes.
2) Trouver la série génératrice de la suite.
3) En déduire une formule pour le terme général de la suite en fonction de $n$.
4) Programmer la formule obtenue, et comparer avec les résultats de la question 1.

**Exercice 2.** Les polynômes eulériens $A_n(t)$ sont définis par la condition

$$f_n(t) = \sum_{k\geq 0} k^n t^k = \frac{A_n(t)}{(1-t)^{n+1}}.$$

1) Montrer que la série génératrice exponentielle

$$F(x,t) = \sum_{n\geq 0} f_n(t)\frac{x^n}{n!}$$

est égale à $(1-te^x)^{-1}$.
2) Afficher les polynômes $A_n(t)$ pour $n \leq 8$.

**Exercice 3.** Prouver que $2^{631} - 1$ n'est pas premier.

**Exercice 4.** Calculer l'inverse de $a = 2^{100}$ modulo $p = 2^{107} - 1$.

**Exercice 5.** Trouver le plus petit entier $x > 0$ vérifiant les congruences

$$\begin{cases} x & \equiv & 1 \bmod & 7 \\ x & \equiv & 2 \bmod & 11 \\ x & \equiv & 3 \bmod & 17 \\ x & \equiv & 4 \bmod & 19 \end{cases}$$