

Examen final de Mathématiques pour l'informatique 4

Licence d'Informatique

—troisième année—

► **Exercice 1.** Soit (u_n) la suite définie par la relation de récurrence $u_n = 2u_{n-1} + 3u_{n-2}$ et les conditions initiales $u_0 = 1, u_1 = 0$.

1. Calculer u_n pour $n = 2, 3, 4, 5$.
2. Trouver la série génératrice $U(x) = \sum_{n \geq 0} u_n x^n$.
3. **En déduire** une expression explicite de u_n en fonction de n .

► **Exercice 2.** Un **arbre plan réduit**, c'est soit un seul noeud \bullet (appelé **racine**), soit un k -uplet $(\bullet, A_1, \dots, A_k)$ où $k \geq 2$ et les A_i sont des arbres plans réduits (les sous-arbres de la racine). Les noeuds qui n'ont pas de descendants sont appelés **feuilles**.

1. Représentez graphiquement les arbres plans réduits à au plus 4 feuilles, et comptez les. Soit a_n le nombre de tels arbres à n feuilles.
2. Traduisez la définition récursive en une équation pour la série génératrice $A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$. On ne cherchera pas à résoudre complètement l'équation obtenue. Indiquer quelle solution est la bonne.

► **Exercice 3.** Soit (a_n) la suite définie par $a_0 = 1, a_1 = 1$ et la relation de récurrence $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 1$.

1. Calculer a_n pour $n \leq 6$.
2. Calculer la série génératrice

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n.$$

3. En déduire la valeur de a_n en fonction de n .

► **Exercice 4.**

1. Calculer le p.g.c.d. d des entiers $a = 1818$ et $b = 234$ par l'algorithme d'Euclide, et trouver deux entiers u et v tels que $d = au + bv$.
2. Calculer l'inverse de 79 dans $\mathbf{Z}/107\mathbf{Z}$.

► **Exercice 5.** Trouver le plus petit entier $x > 0$ vérifiant simultanément les congruences

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5} \\ x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv 2 \pmod{11} \\ x \equiv 1 \pmod{19} \end{cases}$$

► **Exercice 6.** Prouver que $2^{70} + 3^{70}$ est divisible par 13.