MPI4 - Cours 5

Calculs de sommes

On a souvent besoin de calculer des sommes de la forme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

Quelques trucs pas chers

La somme S_n des entiers de 1 à n

peut se trouver en écrivant

$$\begin{array}{cccccccc} & 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ + & n & n-1 & n-2 & \cdots & 2 & 1 \\ = & n+1 & n+1 & n+1 & \cdots & n+1 & n+1 \end{array}$$

donc $2S_n = n(n+1)$, et $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

La somme des coefficients binomiaux

$$S_n = \sum_{0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

découle immédiatement de la formule du binôme (et de son interprétation combinatoire).

La somme d'une suite géométrique

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$

Par exemple,

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Un peu de bricolage

Utilisation de la dérivée

$$\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1} = \frac{d}{dx}\frac{x^{n+1}-1}{x-1} = \frac{nx^{n+1}-(n+1)x^n+1}{(x-1)^2}$$

Par exemple,

$$\sum_{k=1}^{n} k2^k = 2(n2^{n+1} - (n+1)2^n + 1) = (n-1)2^{n+1} + 2$$

In [1]:
```
def S1(n): return sum([k*2**k for k in range(n+1)])

def S2(n): return (n-1)*2**(n+1)+2
```

In [2]:
```
[S1(n) for n in range(1,10)]
```

Out[2]: `[2, 10, 34, 98, 258, 642, 1538, 3586, 8194]`

In [3]:
```
[S2(n) for n in range(1,10)]
```

Out[3]: `[2, 10, 34, 98, 258, 642, 1538, 3586, 8194]`

Dans le même genre,

$$\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} = \frac{d}{dx}(1+x)^n\Big|_{x=1} = n(1+x)^{n-1}\big|_{x=1} = n2^{n-1}.$$

Par exemple, le calcul de la complexité de l'algorithme de Held-Karp (https://en.wikipedia.org/wiki/Held%E2%80%93Karp_algorithm) pour le problème du voyageur de commerce conduit à évaluer les trois sommes

$$\left(\sum_{k=2}^{n-1} k(k-1)\binom{n-1}{k}\right) + (n-1) = (n-1)(n-2)2^{n-3} + (n-1)$$

$$\sum_{k=2}^{n-1} k = \frac{n(n-1)}{2} - 1$$

et

$$\left(\sum_{k=2}^{n-1} k\binom{n-1}{k}\right) + (n-1) = (n-1)2^{n-2}$$

Nous connaissons bien la deuxième, nous venons juste d'évaluer la troisième, et pour la première, on a

$$\sum_{k=2}^{n-1} k(k-1)x^{k-2}\binom{n-1}{k} = \frac{d^2}{dx^2}(1+x)^{n-1} = (n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}$$

d'où le résultat annoncé en posant $x = 1$.

Sommes de puissances d'entiers consécutifs

1. Avec les polynômes de Bernoulli

On veut calculer

$$S_p(n) = \sum_{k=0}^{n-1} k^p = 0^p + 1^p + 2^p + \cdots + (n-1)^p.$$

On peut former une série génératrice exponentielle (pour n fixé et p variable)

$$S(x;n) = \sum_{p\geq 0} S_p(n)\frac{x^p}{p!} = \sum_{p\geq 0}\frac{x^p}{p!}\sum_{k=0}^{n-1} k^p = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{p\geq 0}\frac{(kx)^p}{p!} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{kx} = \frac{e^{nx}-1}{e^x-1}.$$

In [4]:
```
from sympy import *
var('t x') # on prend une variable t plutôt que n pour représenter les polynômes S_p(t)
```

Out[4]:
```
(t, x)
```

In [5]:
```
series((exp(t*x)-1)/(exp(x)-1),x,0,5).removeO().as_poly(x)
```

Out[5]:

$$\operatorname{Poly}\left(\left(\frac{t^5}{120} - \frac{t^4}{48} + \frac{t^3}{72} - \frac{t}{720}\right)x^4 + \left(\frac{t^4}{24} - \frac{t^3}{12} + \frac{t^2}{24}\right)x^3 + \left(\frac{t^3}{6} - \frac{t^2}{4} + \frac{t}{12}\right)x^2 + \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t}{2}\right)x + t, x, domain = \mathbb{Q}[t]\right)$$

In [6]:
```
_.all_coeffs()
```

Out[6]:
```
[t**5/120 - t**4/48 + t**3/72 - t/720,
 t**4/24 - t**3/12 + t**2/24,
 t**3/6 - t**2/4 + t/12,
 t**2/2 - t/2,
 t]
```

In [7]:
```
[factor(f[1])*factorial(f[0]) for f in enumerate(_[::-1])]
```

Out[7]:
```
[t,
 t*(t - 1)/2,
 t*(t - 1)*(2*t - 1)/6,
 t**2*(t - 1)**2/4,
 t*(t - 1)*(2*t - 1)*(3*t**2 - 3*t - 1)/30]
```

On voit, sur ces développements (qu'il aurait été difficile de calculer à la main), que $S_p(t)$ a l'air d'être un polynôme de degré $p+1$.

Peut-on préciser ses coefficients ?

Pour le numérateur $e^{tx}-1$, on connaît la série. Le dénominateur $e^x-1=x+\frac{1}{2}x^2\cdots$ commence par x, son inverse n'est donc pas une série entière. Pour rétablir l'ordre, on écrit

$$S(x;t)=\frac{e^{tx}-1}{x}\frac{x}{e^x-1},$$

et on définit les *nombres de Bernoulli* B_n par

$$\frac{x}{e^x-1}=\sum_{n\geq 0}B_n\frac{x^n}{n!}.$$

On a alors

$$S(x;t)=\sum_{k\geq 0}\frac{t^{k+1}x^k}{(k+1)!}\sum_{l\geq 0}B_l\frac{x^l}{l!}=\sum_{p\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{p}\frac{B_{p-k}t^{k+1}}{(k+1)!(p-k)!}\right)x^p=\sum_{p\geq 0}\left(\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}B_{p-k}t^{k+1}\right)\frac{x^p}{p!}$$

Finalement,

$$S_p(t)=\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^{p}\binom{p+1}{k}B_{p-k}t^{k+1}.$$

Pour calculer les B_n, on écrit

$$\sum_{k\geq 0}\frac{x^k}{(k+1)!}\sum_{l\geq 0}B_l\frac{x^l}{l!}=1$$

ce qui donne $B_0=1$ et la récurrence

$$B_n=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k$$

In [9]:
```
bb = {0:Rational(1)}
def B(n):
    if n in bb: return bb[n]
    else:
        bb[n]= -sum([binomial(n+1,k)*B(k) for k in range(n)])/Rational(n+1)
        return bb[n]
```

In [10]:
```
print([B(n) for n in range(18)])
```

```
[1, -1/2, 1/6, 0, -1/30, 0, 1/42, 0, -1/30, 0, 5/66, 0, -691/2730, 0, 7/6, 0, -3617/510, 0]
```

Les [polynômes de Bernoulli (https://fr.wikipedia.org/wiki/Polyn%C3%B4me_de_Bernoulli)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Polyn%C3%B4me_de_Bernoulli) sont définis par

$$\sum_{n\geq 0}B_n(t)\frac{x^n}{n!}=\frac{xe^{tx}}{e^x-1}=\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}t^k\right)\frac{x^n}{n!}$$

Les nombres de Bernoulli sont donc les $B_n(0)$, et

$$S_p(t)=\frac{B_{p+1}(t)-B_{p+1}(0)}{p+1}.$$

In [11]:
```
factor((bernoulli(4,t)-bernoulli(4))/4) #sympy les connaît !
```

Out[11]:

$$\frac{t^2(t-1)^2}{4}$$

2. Avec les nombres de Stirling

L'opérateur de *différence finie* Δ est défini par

$$\Delta f(t) = f(t+1) - f(t)$$
$$\Delta t^2 = (t+1)^2 - t^2 = 2t+1 \neq 2t$$

Les polynômes

$$(t)_n := t(t-1)\cdots(t-n+1) \quad \text{et} \quad (t)^n := t(t+1)\cdots(t+n-1)$$

ont l'intéressante propriété

$$\Delta(t)_n = (t+1)t(t-1)\cdots(t-n+2) - t(t-1)\cdots(t-n+1) = [(t+1)-(t-n+1)]t(t-1)\cdots(t-n+2) = n(t)_{n-1}$$

et de même, $\Delta(t)^n = n(t)^{n-1}$.

La différence finie

$$\Delta_h f(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

sert à approximer la dérivée en calcul numérique, et les $(t;h)_n = t(t-h)\cdots(t-(n-1)h)$ remplacent les puissances ordinaires. Quitte à changer les unités, on peut supposer $h=1$ pour avoir des formules plus simples. On va se servir de ces propriétés pour calculer des sommes.

En effet, d'un côté

$$\sum_{t=0}^{n-1} \Delta(t)_{p+1} = (p+1)\sum_{t=0}^{n-1}(t)_p$$

et de l'autre,

$$\sum_{t=0}^{n-1} \Delta(t)_{p+1} = \sum_{t=1}^{n}(t)_{p+1} - \sum_{t=0}^{n-1}(t)_{p+1} = (n)_{p+1} - (0)_{p+1} = (n)_{p+1}.$$

Donc,

$$\sum_{t=0}^{n-1}(t)_p = \frac{(n)_{p+1}}{p+1}.$$

C'est l'analogue "discret" de

$$\int_a^b x^p dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_a^b$$

et on pose (notation de Knuth) pour mettre en évidence l'analogie

$$\Sigma_a^b f(t)\delta t = \sum_{t=a}^{b-1} f(t)$$

de sorte que

$$\Sigma_a^b (t)_p \delta t = \left[\frac{(t)_{p+1}}{p+1}\right]_a^b$$

On peut maintenant calculer les sommes d'entiers consécutifs : $(t)_2 = t(t-1) = t^2 - t$, et

$$\sum_{t=0}^{n-1}(t)_2 = S_2(n) - S_1(n) = S_2(n) - \frac{n(n-1)}{2}$$

donc

$$S_2(n) = \frac{n(n-1)(n-2)}{3} + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

Les coefficients des polynômes $(t)_n$ sont appelés *nombres de Stirling signés de première espèce*

$$(t)_n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)t^k.$$

On peut calculer

$$(t)_1 = t,\ (t)_2 = t^2 - t,\ (t)_3 = t^3 - 3t^2 + 2t,\ (t)_4 = t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t,\ \ldots$$

et en déduire dans l'autre sens

$$t = (t)_1,\ t^2 = (t)_2 + (t)_1,\ t^3 = (t)_3 + 3(t)_2 + (t)_1,\ t^4 = (t)_4 + 7(t)_3 + 6(t)_2 + (t)_1.$$

Les coefficients du développement de t^n sur les $(t)_k$ sont les *nombres de Stirling se seconde espèce*, notés $S(n,k)$ ou $\left\{ {n \atop k} \right\}$.

$$t^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)(t)_k.$$

Ce sont bien sûr les mêmes que ceux rencontrés au cours précédent. On avait défini $S(n,k)$ comme le nombre de partitions en k blocs d'un ensemble de n éléments, et vu que la série génératrice des polynômes de Touchard

$$T_n(t) = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)t^k$$

était

$$\sum_{n\geq 0} T_n(t)\frac{x^n}{n!} = e^{t(e^x-1)}.$$

La SGE des polynomes $(t)_n$ est

$$\sum_{n\geq 0}(t)_n \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\binom{t}{n}x^n = (1+x)^t$$

Si on remplace x par $e^x - 1$ dans cette égalité, on trouve

$$(1 + e^x - 1)^t = e^{tx}.$$

Par ailleurs, en comparant

$$e^{t(e^x-1)} = \sum \sum^{n} S(n,k)t^k \frac{x^n}{\cdot} \quad (1)$$

In [ ]: