Compléments sur le calcul des différences finies

Les puissances modifiées $(t)_n$ ou $(t)^n$ peuvent aussi être définies pour les entiers négatifs. L'idée est d'écrire

$$(t)_n = \frac{(t)_{n+1}}{t-n}$$

ce qui est vrai pour $n = \cdots, 3, 2, 1, 0$, et de continuer pour $n = -1, -2, -3, \ldots$, ce qui conduit à

$$(t)_{-1} = \frac{1}{t+1},\ (t)_{-2} = \frac{1}{(t+1)(t+2)},\ \ldots,\ (t)_{-n} = \frac{1}{(t+1)(t+2)\cdots(t+n)}.$$

On a alors

$$\Delta(t)_{-n} = \frac{1}{(t+2)(t+2)\cdots(t+n+1)} - \frac{1}{(t+1)(t+2)\cdots(t+n)} = \frac{(t+1)-(t+n+1)}{(t+1)(t+2)\cdots(t+n)(t+n+1)} = -n(t)_{-n-1},$$

comme pour la dérivée de t^{-n}.

Ce résultat encourageant nous incite à compléter notre collection de fonction discrètes. Toutes nos $(t)_n$ ont une primitive $\frac{(t)_{n+1}}{n+1}$, sauf pour $n = -1$, comme dans le cas classique. L'analogue de $\ln t$ dans notre contexte sera donc

$$H_n := \Sigma_1^n (t)_{-1}\delta t = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Les nombres H_n sont appelés nombres harmoniques (https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_harmonique). Ce sont les sommes partielles de la série harmonique, qui, comme on sait, est divergente :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = \infty.$$

On montre facilement, en encadrant l'intégrale $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ par des rectangles de bases $[1,2], [2,3]$, etc. puis $[0,1], [1,2]$, etc. que $H_n \sim_{+\infty} \ln n$, et même que

$$H_n - \ln n \to \gamma \simeq 0,5772156649015328606\ldots$$

où γ est la constante d'Euler.

Maintenant qu'on a une sorte de logarithme, on peut rechercher un analogue de l'exponentielle. Elle ne risque pas d'être la fonction réciproque de $t \mapsto H_t$ (qui envoie des entiers sur des non entiers), on lui demandera donc de vérifier un analogue de $(e^x)' = e^x$, ce qui amène à résoudre

$$\Delta f(t) = f(t+1) - f(t) = f(t),\ \text{et donc}\ f(t+1) = 2f(t),\ \text{d'où}\ f(t) = 2^t f(0).$$

On prend naturellement $f(0) = 1$, et notre exponentielle discrète est donc $f(t) = 2^t$. C'est donc une *vraie* exponentielle, mais de base 2 plutôt que e.

Nous avons donc à ce stade des analogues des fonctions élémentaires du cours de terminale (sauf les fonctions trigonométriques mais on n'en a pas l'usage ici). L'idée suivante est d'adapter aux calculs de sommes tout ce qu'on sait faire avec les intégrales.

Enfin, pas tout, car on n'aura pas d'analogue du changement de variables : notre variable t prend des valeurs entières, mais pas forcément les fonctions (exemple, H_t).

Par contre, on peut trouver une version de l'ontégration par parties, qui n'est qu'une manière de reformuler la dérivée d'un produit. Calculaons donc

$$\Delta(u(t)v(t)) = u(t+1)v(t+1) - u(t)v(t) = u(t+1)v(t+1) - u(t)v(t+1) + u(t)v(t+1) - u(t)v(t) = \Delta u(t)\cdot v(t+1) + u(t)\Delta v(t)$$

En introduisant l'opérateur de décalage $Ef(t) = f(t+1)$, cela s'écrit

$$\Delta uv = \Delta u E v + u\Delta v.$$

En intégrant, on obtient

$$\Sigma_a^b u(t)\Delta v(t)\delta t = [u(t)v(t)]_a^b - \Sigma_a^b Ev(t)\Delta u(t)\delta t$$

On peut alors imiter des calculs comme

$$\int_a^b xe^x dx = \int_a^b x de^x = [xe^x]_a^b - \int_a^b e^x dx = [x(e^x-1)]_a^b$$

pour obtenir

$$\Sigma_a^b t2^t \delta t = [t2^t]_a^b - \Sigma_a^b 1\cdots 2^{t+1}\delta t = [t2^t - 2^{t+1}]_a^b$$

qui donne pour $a = 0, b = n$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k2^k = n2^n - 2^{n+1} + 2 = (n-2)2^n + 2,$$

comme on l'a déjà montré autrement.

Exercices

1. En imitant le calcul de $\int_a^b \ln x dx$ par parties, trouver une formule pour la somme
$$A(n) = \sum_{k=0}^{n-1} H_k$$
et vérifiez la avec un programme.
2. Même questions pour la somme
$$B(n) = \sum_{k=0}^{n-1} kH_k.$$
3. Calculer la somme
$$C(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{H_k}{(k+1)(k+2)}$$
en imitant le calcul de $\int_a^b \ln(x) \frac{dx}{x^2}$.

```
In [ ]:
```