
Le Théorème de Pitman, le groupe quantique $SU_q(2)$, et une question de P. A. Meyer

Philippe Biane

CNRS
Département de Mathématiques et Applications
École Normale Supérieure
45, rue d'Ulm
F-75005 Paris
Philippe.Biane@ens.fr

Summary. On montre comment le théorème $2S - B$ de Pitman peut s'obtenir en « cristallisant » une marche de Bernoulli quantique.

1 Introduction

Le but de cette note est de relier le théorème de Pitman, dans sa version en temps discret, avec la théorie des représentations du groupe $SU(2)$, et plus généralement des groupes quantiques $SU_q(2)$. On verra que ce théorème apparaît naturellement lors de la « cristallisation », au sens de Kashiwara, i.e. lorsque $q \rightarrow 0$.

L'idée de considérer les représentations de $SU(2)$ en liaison avec les processus de Bessel de dimension 3 provient d'une question de P. A. Meyer, qui avait demandé, lors d'un exposé en 1989, comment calculer la loi de la partie radiale d'une marche de Bernoulli quantique (voir la partie 3 pour plus de précisions).

Cette étude ne nous en apprendra pas plus sur le théorème de Pitman lui-même, mais elle a le mérite de suggérer comment généraliser ce résultat à des situations plus complexes, en dimensions supérieures. En fait la transformation de Pitman est reliée à des opérations introduites par Littelmann [12] en théorie des représentations. Les liens entre ces objets sont étudiés plus en détails dans [5].

L'article est organisé de la façon suivante : dans la partie 2 je rappelle l'énoncé du théorème de Pitman ainsi que sa version discrète. La partie 3 contient des généralités sur les processus stochastiques non commutatifs, ainsi que la définition des marches de Bernoulli quantiques, puis je donne une interprétation de ces marches de Bernoulli quantiques en termes de

représentations du groupe $SU(2)$. Dans la partie 4 je montre comment, en passant de $SU(2)$ au groupe quantique $SU_q(2)$, puis en faisant tendre q vers 0, on obtient le théorème de Pitman de façon naturelle. Finalement on termine par des considérations sur les généralisations possibles de ces résultats.

2 Le théorème de Pitman

Soit $(X_t; t \geq 0)$ un mouvement brownien réel, issu de 0, le théorème de Pitman [16] affirme que le processus $(T_t := 2S_t - X_t; t \geq 0)$, où $S_t = \sup_{s \leq t} X_s$, est un processus de Bessel de dimension 3, i.e. a la même loi que la norme d'un mouvement brownien de dimension 3. Une fois énoncé, le théorème est facile à vérifier, il suffit de calculer la loi du processus $((X_t, S_t); t \geq 0)$, qui est un processus de Markov, pour en déduire le résultat. On obtient de cette façon un bonus, le fait que pour tout $t > 0$ la loi conditionnelle de la variable X_t , connaissant la trajectoire $(T_s, 0 \leq s \leq t)$, est uniforme sur l'intervalle $[-T_t, T_t]$. Faisons dès à présent une observation. Soit $(X_t, Y_t, Z_t; t \geq 0)$ un mouvement brownien de dimension trois, alors le processus $R_t = \sqrt{X_t^2 + Y_t^2 + Z_t^2}$ est un processus de Bessel de dimension trois, X_t est un mouvement brownien réel, et on vérifie facilement, en utilisant l'invariance par rotation de la loi du mouvement brownien, que la loi conditionnelle de X_t sachant la trajectoire $(R_s; 0 \leq s \leq t)$ est la loi uniforme sur l'intervalle $[-R_t, R_t]$. On voit ainsi que les processus $((X_t, T_t); t \geq 0)$ et $((X_t, R_t); t \geq 0)$ ont mêmes lois marginales de rang 1, les processus obtenus en prenant la première ou la deuxième coordonnée ont la même loi, mais les lois des couples de processus ne coïncident pas, car T est mesurable par rapport à la filtration de X , ce qui n'est pas le cas de R . La clé pour comprendre le théorème de Pitman va consister à trouver une interpolation naturelle entre les lois de ces deux couples de processus. Il est possible de faire cette interpolation de façon purement «classique», comme dans [6] mais ici nous allons la faire en introduisant des approximations en temps discret de ces processus, ce qui amène à considérer les groupes quantiques $SU_q(2)$, comme expliqué ci-dessous.

La démonstration originale de Pitman repose en effet sur un analogue en temps discret du théorème. Considérons une marche de Bernoulli, i.e. $X_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ où les x_j sont des variables de Bernoulli indépendantes, centrées ($P(x_j = \pm 1) = 1/2$). Le résultat est que le processus $(T_n := 2S_n - X_n; n \geq 1)$, où $S_n = \sup\{X_k; 0 \leq k \leq n\}$, est une chaîne de Markov sur \mathbb{N} de probabilités de transition

$$p(k, k+1) = \frac{k+2}{2(k+1)}; \quad p(k, k-1) = \frac{k}{2(k+1)}. \quad (1)$$

De plus la loi conditionnelle de X_n sachant la trajectoire $(T_k; k \leq n)$ est uniforme sur l'ensemble $\{-T_n, -T_n+2, \dots, T_n-2, T_n\}$. Le théorème de Pitman pour le mouvement brownien s'en déduit par un changement d'échelle et un

passage à la limite. La démonstration de Pitman repose sur le fait que la transformation de Pitman peut s'inverser, c'est-à-dire que l'on peut retrouver la trajectoire de X en connaissant celle de T , à condition de connaître en plus la valeur de X_n , en fait on a la formule explicite

$$X_k = \inf\{2T_l; k \leq l \leq n\} \wedge (X_n + T_n) - T_k.$$

Évidemment une formule analogue est valable dans le cas du temps continu. Proposons ici une approche équivalente mais plus adaptée à notre propos. On calcule les probabilités de transition de la chaîne de Markov $((S_n, X_n); n \geq 1)$, à valeurs dans l'ensemble $\{(s, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid s \geq k\}$, on trouve facilement

$$\begin{aligned} p((s, k), (s, k+1)) &= \frac{1}{2}, & p((s, k), (s, k-1)) &= \frac{1}{2} & \text{si } s > k \\ p((s, s), (s+1, s+1)) &= \frac{1}{2}, & p((s, s), (s, s-1)) &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

ce qui donne les probabilités de transition de la chaîne de Markov $((T_n, X_n); n \geq 1)$, à valeurs dans $\{(t, k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{Z} \mid k \in (-t, -t+2, \dots, t-2, t)\}$,

$$\begin{aligned} p((t, k), (t-1, k+1)) &= \frac{1}{2}, & p((t, k), (t+1, k-1)) &= \frac{1}{2} & \text{si } s > k \\ p((t, t), (t+1, t+1)) &= \frac{1}{2}, & p((t, t), (t+1, t-1)) &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

On vérifie alors, par récurrence sur n , que la loi conditionnelle de X_n , sachant T_1, \dots, T_n , est la loi uniforme sur l'ensemble $\{-T_n, -T_n+2, \dots, T_n-2, T_n\}$. Le fait que $(T_n; n \geq 0)$ soit une chaîne de Markov avec les bonnes probabilités de transition s'en déduit aisément. Notre stratégie pour retrouver de façon naturelle le théorème de Pitman va consister à exhiber un analogue discret du processus $((X_t, R_t); t \geq 0)$, ce que nous ferons en considérant des marches aléatoires quantiques. Ensuite nous déformerons la loi de ce processus au moyen de la théorie des groupes quantiques, par un paramètre réel $q \in]0, 1]$, de sorte que la loi de chaque composante reste constante, que la loi conditionnelle de X_n sachant R_1, \dots, R_n soit uniforme sur l'intervalle $\{-R_n, -R_n+2, \dots, R_n-2, R_n\}$, mais que la loi du couple $((X_n, R_n); n \geq 1)$ converge vers celle du couple $((X_n, T_n); n \geq 1)$ lorsque $q \rightarrow 0$.

3 Marches de Bernoulli quantiques

Dans cette partie je vais faire des rappels sur les processus stochastiques non-commutatifs et les marches de Bernoulli quantiques. Ce sujet est traité dans [1] et dans le premier chapitre de [4], auxquels je renvoie pour plus de détails. Pour une introduction aux probabilités quantiques, on peut consulter le livre de référence de Meyer [11].

Dans la suite on considère des espaces de probabilités non-commutatifs. Un tel espace est une algèbre A sur \mathbb{C} , avec une unité, habituellement munie d'une involution antilinéaire $*$, et d'une forme linéaire η , qui joue le rôle d'espérance, qui vérifie $\eta(1) = 1$ et $\eta(a^*a) \geq 0$ pour tout $a \in A$. La donnée d'un élément

autoadjoint $x = x^*$ détermine alors une suite de nombres réels $(\eta(x^n); n \geq 0)$, qui sont les moments d'une mesure de probabilités sur \mathbb{R} , non nécessairement unique. Si cette loi est unique on l'appelle la loi de l'élément x . Par exemple, lorsque l'algèbre est $M_n(\mathbb{C})$, et $\eta(M) = \frac{1}{n} \text{Tr}(M)$ alors la loi d'un élément autoadjoint $M \in M_n(\mathbb{C})$ est la mesure empirique sur les valeurs propres de M (comptées avec leur multiplicité). Évidemment dans ce cas la loi est à support compact et donc déterminée par ses moments.

Plus généralement si on se donne une famille d'éléments autoadjoints qui commutent x_1, \dots, x_k , alors les nombres $\eta(x_1^{l_1} \dots x_k^{l_k}); l_1, l_2, \dots, l_k \geq 1$ sont les moments d'une mesure de probabilités sur \mathbb{R}^k , que l'on appelle la loi jointe des x_k si elle est unique. De nouveau, si l'algèbre est de dimension finie, la loi est à support compact (et même fini), et donc est déterminée par ses moments. C'est dans ce cadre que nous nous placerons dans toute la suite.

L'exemple le plus simple est celui de $M_2(\mathbb{C})$, les matrices de taille 2×2 sur \mathbb{C} , avec $\eta(M) = \frac{1}{2} \text{Tr}(M)$. On considère les matrices de Pauli

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

chacune d'elles suit une loi de Bernoulli symétrique, et elles vérifient les relations de commutation $[x, y] = 2iz$, $[y, z] = 2ix$ et $[z, x] = 2iy$. En particulier, elles ne commutent pas, on ne peut donc pas parler de leur loi jointe. L'algèbre $M_2(\mathbb{C})^{\otimes N}$ est isomorphe à l'algèbre des matrices $M_{2^N}(\mathbb{C})$, et le produit tensoriel des traces sur chacun des facteurs est la trace sur $M_{2^N}(\mathbb{C})$. Dans cette algèbre on considère les éléments (I désigne la matrice identité)

$$x_i = I^{\otimes(i-1)} \otimes x \otimes I^{\otimes(N-i)} \quad y_i = I^{\otimes(i-1)} \otimes y \otimes I^{\otimes(N-i)}$$

$$z_i = I^{\otimes(i-1)} \otimes z \otimes I^{\otimes(N-i)}$$

pour $i = 1, \dots, N$, et leurs sommes partielles

$$X_n = x_1 + \dots + x_n, \quad Y_n = y_1 + \dots + y_n, \quad Z_n = z_1 + \dots + z_n$$

Chacun des processus $(X_n; 1 \leq n \leq N)$, $(Y_n; 1 \leq n \leq N)$ et $(Z_n; 1 \leq n \leq N)$ est constitué d'opérateurs qui commutent, on peut donc calculer leur loi, qui est, dans les trois cas, celle d'une marche de Bernoulli centrée. Ces opérateurs vérifient les relations de commutation $[X_n, Y_m] = 2iZ_{n \wedge m}$, ainsi que celles obtenues par permutation circulaire de X, Y, Z . On constate que ces relations de commutation entraînent que les opérateurs $\Sigma_n = \sqrt{I + X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2}$ commutent entre eux. On peut calculer la loi du processus $(\Sigma_n; n \geq 1)$ et on trouve par des calculs explicites (cf [4]) que c'est la loi de la chaîne de Markov sur \mathbb{N}^* , de lois de transition

$$p(k, k+1) = \frac{k+1}{2k}, \quad p(k, k-1) = \frac{k-1}{2k}. \quad (3)$$

Autrement dit, le processus $(R_n := \Sigma_n - I, n \geq 1)$ a les mêmes probabilités de transition que (1). De plus, pour tout n , les opérateurs R_1, \dots, R_n et X_n

commutent et la loi conditionnelle de X_n sachant R_1, \dots, R_n est uniforme sur $\{-R_n, -R_n + 2, \dots, R_n - 2, R_n\}$.

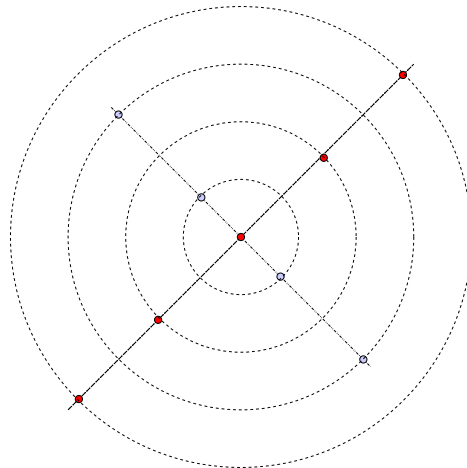
Plutôt que de reproduire la preuve de [4], je vais expliquer comment on peut retrouver ce résultat par la théorie des représentations de $SU(2)$. Les relations de commutation entraînent que, pour chaque $n \geq 1$, les opérateurs X_n, Y_n et Z_n engendrent une représentation de l'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Rappelons que cette algèbre de Lie est de dimension 3, engendrée par trois éléments x, y, z , qui vérifient les relations

$$[x, y] = 2iz, \quad [y, z] = 2ix, \quad [z, x] = 2iy.$$

D'autre part, l'opérateur $\Sigma_n^2 = I + X_n^2 + Y_n^2 + Z_n^2$, est l'image dans cette représentation de l'opérateur de Casimir $1 + x^2 + y^2 + z^2$, qui engendre le centre de l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. On sait que les représentations irréductibles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ sont indexées par les entiers $l \geq 1$; pour chacun de ces entiers il existe une unique (à isomorphisme près) représentation irréductible de dimension l . De plus dans cette représentation l'opérateur de Casimir est un multiple de l'identité de valeur propre l^2 . On peut en déduire la loi du processus $(R_k; k \leq N)$. Pour cela supposons que nous avons décomposé la représentation $(\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ en composantes irréductibles. Alors pour trouver les valeurs propres et les sous-espaces propres de R_{n+1} , pour chaque copie $V_k \subset (\mathbb{C}^2)^{\otimes n}$ de la représentation de dimension k , il nous faut décomposer la représentation $V_k \otimes \mathbb{C}^2$. Les formules de Clebsch-Gordan donnent la réponse, cette représentation se scinde en somme directe de deux représentations $V_k \otimes V_2 \sim V_{k-1} \oplus V_{k+1}$. Les probabilités de transition sont proportionnelles aux dimensions respectives de ces représentations, ce qui redonne bien la formule cherchée. La loi conditionnelle de X_n sachant la trajectoire R_1, \dots, R_n s'obtient en remarquant que dans une représentation irréductible V_k , où R_n prend la valeur $k-1$, l'image de l'élément x de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ a un spectre formé des k valeurs propres $\{-k+1, -k+3, \dots, k-3, k-1\}$, chacune ayant multiplicité 1.

Une fois ces observations faites nous allons donner une construction plus abstraite de la marche aléatoire ci-dessus. Nous aurons besoin de la notion de variable aléatoire à valeurs dans un espace non-commutatif. Un espace non-commutatif est donné par une algèbre qui joue le rôle d'algèbre de fonctions sur l'espace. La notion de variable aléatoire à valeurs dans un espace est remplacée par celle de morphisme d'algèbres, à valeurs dans un espace de probabilités non-commutatif. Le lien avec la situation classique est facile à comprendre, une variable aléatoire ordinaire $X : \Omega \rightarrow E$ donne lieu à un morphisme d'algèbres $\mathcal{X} : L^\infty(E) \rightarrow L^\infty(\Omega)$ défini par la formule $\mathcal{X}(f) = f(X)$, et réciproquement la donnée d'un tel morphisme détermine la valeur de la variable aléatoire X (presque sûrement). Dans la situation non-commutative, les points des espaces non-commutatifs n'existent plus, mais la notion de morphisme d'algèbres garde un sens. Nous allons donc construire les processus X, Y, Z, R ci-dessus et les considérer comme des coordonnées d'un processus à valeurs dans un espace non-commutatif. Cet espace non-commutatif sera le dual de $SU(2)$ ce qui signifie que l'algèbre de « fonctions non-commutatives »

qui le définira sera l'algèbre du groupe $SU(2)$. Il y a plusieurs choix possibles d'algèbres de convolution sur un groupe, on peut convoler par exemple les fonctions L^1 , ou les mesures finies, ou encore les fonctions continues ou les fonctions régulières si on est sur un groupe de Lie. Les subtilités liées au choix de la topologie, et in fine de la complétion ne sont pas très utiles pour comprendre les calculs algébriques, je renvoie à la discussion de [2] pour plus d'information, et je me contenterai de donner une description informelle de cette algèbre. Comme nous avons vu, il existe pour chaque entier $l \geq 1$ une unique représentation irréductible de dimension l du groupe $SU(2)$, ce qui suggère de prendre pour l'algèbre $\mathcal{A}(SU(2))$ le produit direct des algèbres de matrices $M_l(\mathbb{C})$ pour $l \geq 1$. Tout autre choix pourra se plonger dans cette grosse algèbre. Dans cette algèbre se trouvent des éléments x, y, z correspondant à la base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, et dont les composantes sur chaque sous-algèbre $M_l(\mathbb{C})$ forment la représentation de dimension l de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. L'opérateur de Casimir $1 + x^2 + y^2 + z^2$ a pour composante dans chaque algèbre $M_l(\mathbb{C})$ un opérateur scalaire de valeur propre l^2 , tandis que les composantes des opérateurs x, y et z sont diagonalisables, et leurs valeurs propres, de multiplicité 1, sont $\{-l+1, -l+3, \dots, l-3, l-1\}$. On peut considérer ces opérateurs comme trois coordonnées sur l'espace non-commutatifs sous-jacent. Chaque sous-algèbre $M_l(\mathbb{C})$ est une sorte de sphère non-commutative de dimension 3, de rayon $l-1$.



L'espace non-commutatif correspondant à $\mathcal{A}(SU(2))$

À chaque direction de l'espace à trois dimensions (α, β, γ) , on peut faire correspondre l'opérateur $\alpha x + \beta y + \gamma z$. Dans une telle direction, la coordonnée peut prendre des valeurs entières. On peut dans cet espace déterminer simultanément le rayon de la sphère sur laquelle on se trouve et la coordonnée dans une des directions de l'espace, auquel cas on trouve que les valeurs possibles des coordonnées sont $-r, r+2, \dots, r-2, r$ où r est le rayon de la sphère. Par contre on ne peut pas déterminer simultanément les coordonnées dans deux

directions de l'espace qui ne sont pas parallèles, car les opérateurs correspondants ne commutent pas.

J'ai représenté de manière symbolique cet espace dans le dessin ci-dessus. Les algèbres $M_l(\mathbb{C})$ sont représentées par des sphères « floues » concentriques (j'ai représenté celles de rayons 0 à 4). J'ai aussi montré les coordonnées que l'on peut obtenir en faisant une mesure dans deux directions sur les sphères de rayons 3 et 4.

Nous allons maintenant construire un processus stochastique non-commutatif sur l'algèbre $\mathcal{A}(SU(2))$. Pour cela il nous faut construire des morphismes de $\mathcal{A}(SU(2))$ à valeurs dans un espace de probabilités non-commutatif. On va se servir de la structure d'algèbre de Hopf de $\mathcal{A}(SU(2))$.

L'algèbre $\mathcal{A}(SU(2))$ possède en effet une structure d'algèbre de Hopf (comme toute algèbre de groupe), ce qui correspond à la donnée d'un coproduit, qui est un morphisme $\Delta : \mathcal{A}(SU(2)) \rightarrow \mathcal{A}(SU(2)) \otimes \mathcal{A}(SU(2))$, ainsi que d'autres données, satisfaisant des axiomes que l'on peut trouver par exemple dans [11]. Pour comprendre la signification de cette structure, considérons un groupe G , et l'espace des fonctions (continues, ou essentiellement bornées, ou polynomiales, etc...) sur G , muni de la multiplication usuelle qui en fait une algèbre $A(G)$ (que l'on notera $C(G), L^\infty(G), \mathcal{P}(G), \dots$ suivant l'espace de fonctions choisi). La donnée de cet algèbre caractérise l'ensemble G en tant qu'espace, mais ne permet pas de trouver sa structure de groupe. Pour cela il faut considérer le produit $G \times G \rightarrow G$. Comme tout à l'heure on peut considérer le morphisme d'algèbre $\Delta : A(G) \rightarrow A(G \times G)$ induit par cette application, donné par la formule $\Delta f(g, h) = f(gh)$. Si on identifie $A(G) \otimes A(G)$ avec une algèbre de fonctions sur $G \times G$, alors Δ est un coproduit. Les propriétés qui font de G un groupe (associativité, élément neutre, existence d'un inverse) peuvent se traduire en terme de propriétés du coproduit. Par exemple l'associativité du produit dans le groupe est équivalente au fait que les deux morphismes $(\Delta \otimes I) \circ \Delta, (I \otimes \Delta) \circ \Delta : A(G) \rightarrow A(G) \otimes A(G) \otimes A(G)$ sont égaux. La notion d'algèbre de Hopf est « autoduale », ce qui signifie que si H est une algèbre de Hopf alors l'espace dual H^* est encore une algèbre de Hopf, il suffit de renverser les flèches dans tous les morphismes considérés (modulo les problèmes usuels de passage au dual si la dimension est infinie). Ainsi si G est un groupe abélien, alors il a un groupe dual \hat{G} , et les algèbres de Hopf correspondantes sont en dualité. Dans la situation que nous considérons, le groupe $SU(2)$ n'est pas commutatif, par conséquent l'algèbre du groupe, dont la structure d'algèbre de Hopf est duale de celle de l'algèbre des fonctions sur G , n'est pas l'algèbre des fonctions sur un espace ordinaire, mais nous pouvons la considérer comme l'algèbre des fonctions sur un espace non-commutatif. Nous pouvons facilement écrire des formules pour le coproduit d'éléments de cette algèbre suffisamment simples. En fait on a

$$\Delta(\alpha x + \beta y + \gamma z) = \alpha(x \otimes I + I \otimes x) + \beta(y \otimes I + I \otimes y) + \gamma(z \otimes I + I \otimes z)$$

(I désigne l'identité de $\mathcal{A}(SU(2))$) ce qui suffit à caractériser ce coproduit.

Passons maintenant à la construction de la marche de Bernoulli quantique. Soit un groupe G , muni d'une mesure de probabilités μ , nous pouvons

construire une marche aléatoire dont la loi des accroissements est μ en considérant l'espace produit $(G^N, \mu^{\otimes N})$ et en définissant la suite de variables aléatoires $(X_n(g_1, \dots, g_N) = g_1 g_2 g_3 \dots g_n; n = 1, 2, \dots, N)$. Si nous prenons le point de vue des algèbres, les variables X_n induisent des morphismes $\mathcal{X}_n : A(G) \rightarrow A(G)^{\otimes N}$ donnés au moyen du coproduit Δ par les formules

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_1(x) &= x \otimes I^{\otimes(N-1)} \\ \mathcal{X}_2(x) &= \Delta(x) \otimes I^{\otimes(N-2)} \\ \mathcal{X}_3(x) &= ((I \otimes \Delta) \circ \Delta(x)) \otimes I^{\otimes(N-3)}\end{aligned}$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$\mathcal{X}_n(x) = ((I^{n-2} \otimes \Delta) \circ \mathcal{X}_{n-1}(x)) \otimes I^{\otimes(N-n)}.$$

On peut faire la même construction avec n'importe quelle algèbre de Hopf H munie d'une involution $*$, (en fait il suffit que H soit munie d'un coproduit coassociatif, les autres propriétés ne jouant pas de rôle dans la construction), à condition de disposer d'un état η sur l'algèbre de Hopf, c'est-à-dire une forme linéaire positive, qui vaut 1 sur l'identité. On considère alors l'algèbre $H^{\otimes N}$, munie de l'état $\eta^{\otimes N}$ et on définit les $\mathcal{X}_k : H \rightarrow H^{\otimes N}$ par la formule ci-dessus. La marche de Bernoulli quantique construite plus haut correspond à cette construction pour l'algèbre $\mathcal{A}(SU(2))$, lorsque l'état est la trace normalisée sur la composante $M_2(\mathbb{C})$.

Dans le cas général, une telle marche aléatoire quantique satisfait la propriété de Markov suivante : soit $f \in H$ et ξ un élément de l'algèbre engendrée par les $(\mathcal{X}_k(H); k \leq n)$, alors on a

$$\eta^{\otimes N}[\mathcal{X}_n(f)\xi] = \eta^{\otimes N}[\mathcal{X}_{n-1}(P(f))\xi]$$

où $P : H \rightarrow H$ est défini par

$$Pf = (I \otimes \eta) \circ \Delta(f).$$

Dans le cas d'une marche aléatoire ordinaire sur un groupe abélien, en identifiant H avec l'algèbre des fonctions sur \hat{G} , et η avec la mesure μ , on voit que P est l'opérateur de convolution par la mesure μ

$$Pf(x) = \int_{\hat{G}} f(xy) d\mu(y).$$

Dans le cas général cet opérateur possède une propriété de positivité : si f est positif dans l'algèbre H alors $P(f)$ l'est également. Il est même complètement positif, une propriété plus forte, mais nous ne nous servirons pas de cette notion (cf [11], [15]). Nous l'appellerons l'opérateur de transition de la marche aléatoire quantique.

Si on a construit une telle marche aléatoire quantique on peut en déduire des processus stochastiques « classiques » à valeurs dans des espaces ordinaires, pour cela il suffit de trouver une sous-algèbre commutative $B \subset H$ de

l'algèbre de Hopf, telle que les images $(X_n(B); n \geq 0)$ commutent dans l'espace de probabilités non-commutatif. L'algèbre B , étant commutative, s'interprète comme une algèbre de fonctions sur un espace \hat{B} (son spectre), de même, il existe un espace de probabilités Ω dont l'algèbre des variables aléatoires bornées soit l'algèbre engendrée par les $(X_n(B); n \geq 0)$, et les morphismes \mathcal{X}_n proviennent de variables aléatoires définies sur Ω et à valeurs dans \hat{B} .

Dans le cas qui nous intéresse, il y a deux sortes de sous-algèbres intéressantes, d'une part pour chaque sous-groupe commutatif de $SU(2)$, on peut considérer la sous-algèbre de $\mathcal{A}(SU(2))$ qu'il engendre. Cette algèbre est isomorphe à l'algèbre des fonctions sur le dual de ce groupe commutatif, et on obtient ainsi une marche aléatoire sur ce groupe dual. La loi des accroissements de cette marche aléatoire est obtenue en prenant la restriction de l'état à la sous-algèbre engendrée par le groupe. Par exemple si on considère le groupe à un paramètre engendré par un élément $v \in SU(2)$, alors on obtient une marche aléatoire sur le groupe dual, qui est isomorphe à \mathbb{Z} . C'est ainsi que l'on peut interpréter les marche aléatoires de Bernoulli X_n, Y_n, Z_n obtenues au début, elles correspondent aux sous-groupes à un paramètre de $SU(2)$ de générateurs ix, iy et iz respectivement.

Une autre sous-algèbre commutative intéressante est le centre de l'algèbre $\mathcal{A}(SU(2))$. Celui-ci est engendré par l'opérateur de Casimir, et il est isomorphe à l'algèbre des fonctions sur \mathbb{N} . On peut montrer que ses images par les \mathcal{X}_n engendrent une algèbre commutative. Comment, dans ce contexte, calculer la loi de ce processus? On utilise la propriété de Markov énoncée plus haut. En effet si une sous-algèbre $B \subset H$ est stable par l'opérateur P , alors elle vérifie la propriété de Markov avec pour opérateur de transition la restriction de P à B . Il est facile de voir que si l'algèbre engendrée par les $\mathcal{X}_k(B)$ est commutative et si B est stable par P , alors les restrictions des \mathcal{X}_k à B définissent un processus de Markov classique sur \hat{B} de noyau de transition donné par P . Dans le cas du centre de l'algèbre $\mathcal{A}(SU(2))$, on peut calculer ce noyau de transition explicitement ce qui revient comme précédemment à calculer la décomposition en composantes irréductibles de la représentation $V_k \otimes V_2$. Le formalisme abstrait ci-dessus a un avantage, il nous permet de découvrir, caché dans la marche de Bernoulli quantique, un processus de Markov non-commutatif à valeurs dans un « vrai » espace commutatif. Considérons en effet l'algèbre engendrée par un sous-groupe à un paramètre de $SU(2)$ et par le centre de $\mathcal{A}(SU(2))$. Cette algèbre est évidemment commutative et on peut vérifier qu'elle est stable par l'opérateur P . La restriction de P à cette algèbre correspond donc à un noyau markovien sur un espace « commutatif ». Commençons par déterminer quel est cet espace. Pour le trouver, diagonalisons la composante du générateur du groupe à un paramètre dans un des espaces $M_l(\mathbb{C})$. Cet opérateur admet l valeurs propres distinctes. On voit alors que la sous-algèbre engendrée par ce sous-groupe à un paramètre et par le centre est isomorphe au produit des sous-algèbres des matrices diagonales dans $\prod_{l \geq 1} M_l(\mathbb{C})$, (en particulier c'est une algèbre abélienne maximale). Il est commode d'utiliser les valeurs propres du générateur du groupe à un paramètre et

le rayon (qui vaut $l-1$ dans la représentation de dimension l) pour paramétrer les points de cet ensemble. On voit donc qu'il est donné par

$$\{(r, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \mid k \in \{-r, -r+2, \dots, r-2, r\}\}.$$

Calculons le noyau de transition obtenu en restreignant P à cette sous-algèbre. Pour cela il est utile de considérer l'algèbre de Hopf duale de $\mathcal{A}(SU(2))$. L'opérateur dual de P envoie $\mathcal{A}^*(SU(2))$ dans elle-même, et est donné par $u \mapsto \chi u$ où χ est le caractère normalisé de la représentation de dimension 2 de $SU(2)$, et où on a identifié $\mathcal{A}^*(SU(2))$ avec l'algèbre des fonctions sur $SU(2)$, munie du produit ordinaire. Choisissons pour tout r une base orthonormale $(e_j^r; j \in -r, -r+2, \dots, r-2, r)$ de la représentation V_{r+1} dans laquelle le générateur du sous-groupe à un paramètre est diagonal, alors il faut comprendre comment les fonctions coefficients $u_{jj}^r(g) = \langle g e_j^r, e_j^r \rangle$ sont transformées par P^* . La réponse est donnée par la formule classique de Clebsch-Gordan

$$\begin{aligned} u_{jj}^r u_{-1-1}^1 &= \frac{r-j+2}{2(r+1)} u_{j-1j-1}^{r+1} + \frac{r+j}{2(r+1)} u_{j-1j-1}^{r-1} \\ u_{jj}^r u_{11}^1 &= \frac{r+j+2}{2l} u_{j+1j+1}^{r+1} + \frac{r-j}{2(r+1)} u_{j+1j+1}^{r-1} \end{aligned}$$

Comme $u_{jj}^r \chi = \frac{1}{2}(u_{-1-1}^2 + u_{11}^2)u_{jj}^r$ on en déduit les probabilités de transition de la chaîne

$$\begin{aligned} p((r, k), (r+1, k+1)) &= \frac{r+k+2}{2(r+1)} \\ p((r, k), (r+1, k-1)) &= \frac{r-k+2}{2(r+1)} \\ p((r, k), (r-1, k+1)) &= \frac{r-k}{2(r+1)} \\ p((r, k), (r-1, k-1)) &= \frac{r+k}{2(r+1)}. \end{aligned}$$

On a donc obtenu une sous-algèbre commutative stable par P , toutefois la marche de Bernoulli quantique ne définit pas un processus classique associé sur l'espace correspondant car les images de cette sous-algèbre par les morphismes $\mathcal{X}_k; k \geq 1$ ne commutent pas entre elles, comme on peut le voir en remarquant que X_m ne commute pas avec R_n si $n > m$. Le processus défini par les restrictions des \mathcal{X}_k à cette sous-algèbre est donc un processus de Markov non-commutatif, à valeurs dans un espace commutatif, avec un noyau de transition commutatif.

4 Groupes quantiques

L'algèbre de Hopf de $SU(2)$ peut être déformée en introduisant un paramètre réel q . Je renvoie au premier chapitre de [10] pour une présentation claire

et concise des principales propriétés de cette construction. On obtient une algèbre de Hopf $\mathcal{A}(SU_q(2))$, dont la structure d'algèbre ne dépend pas de q , mais dont le coproduit, lui, en dépend. Pour définir cette algèbre on part des générateurs suivants de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

vérifiant les relations de commutation

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h.$$

Ces dernières formules définissent l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. On définit l'algèbre enveloppante quantique de $SU_q(2)$, q étant un paramètre (dans notre cas $q \in]0, 1[$) au moyen de générateurs t, e, f , qui vérifient les relations

$$tet^{-1} = q^2e, \quad tft^{-1} = q^{-2}f, \quad ef - fe = \frac{t - t^{-1}}{q - q^{-1}}$$

avec un coproduit donné par les formules suivantes :

$$\Delta(t) = t \otimes t, \quad \Delta(e) = e \otimes t^{-1} + 1 \otimes e, \quad \Delta(f) = f \otimes 1 + t \otimes f.$$

On vérifie que si l'on pose formellement $t = q^h$ et que l'on fait tendre q vers 1 dans ces formules on retrouve les relations de commutation définissant l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, ainsi que son coproduit, par exemple la relation $[h, e] = 2e$ s'obtient en dérivant en $\epsilon = 0$ la relation $q^{\epsilon h} e q^{-\epsilon h} = q^{2\epsilon} e$.

On montre que les représentations irréductibles de dimension finie de cette algèbre sont des déformations de celles de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Pour chaque entier $r \geq 0$ il existe deux représentations dans des espaces V_{r+1}^+ et V_{r+1}^- , munis de bases $v_k^{r\pm}$; $k \in \{-r, -r+2, \dots, r-2, r\}$, données par les formules

$$\begin{aligned} tv_j^{r\pm} &= \pm q^j v_j^{r\pm} \\ ev_j^{r\pm} &= \pm \sqrt{\left[\frac{r-j}{2} \right]_q \left[\frac{r+j+2}{2} \right]_q} v_{j+2}^{r\pm} \\ fv_j^{r\pm} &= \sqrt{\left[\frac{r-j+2}{2} \right]_q \left[\frac{r+j}{2} \right]_q} v_{j-2}^{r\pm}. \end{aligned}$$

où on a posé, conformément à une tradition bien établie,

$$[n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}.$$

Le coproduit permet de définir le produit tensoriel (au sens de Kronecker) de deux représentations. On montre que ce produit tensoriel obéit aux mêmes règles que celui des représentations de $SU(2)$, i.e. on a une décomposition

$$V_{r_1+1}^{\epsilon_1} \otimes V_{r_2+1}^{\epsilon_2} = \bigoplus_{r=|r_2-r_1|, |r_2-r_1|+2, \dots, r_1+r_2} V_{r+1}^{\epsilon_1 \epsilon_2}.$$

Désormais nous ne nous intéressons qu'aux représentations du type V_l^+ , et on considère l'algèbre de Hopf $\mathcal{A}^+(SU_q(2)) = \prod_{r \geq 0} \text{End}[V_{r+1}^+]$, qui en tant qu'algèbre est isomorphe à $\mathcal{A}(SU(2))$, mais dont le coproduit est déformé par les formules ci-dessus. Nous allons déformer la marche aléatoire quantique considérée au paragraphe précédent, et calculer le noyau markovien associé à ses restrictions. On considère donc l'état $\eta = \frac{1}{2}Tr$ sur la composante de dimension 2 de $\mathcal{A}^+(SU_q(2))$. On peut alors calculer les probabilités de transition obtenues en restreignant l'opérateur de transition à la sous-algèbre engendrée par t et par le centre de $\mathcal{A}^+(SU_q(2))$. Si l'on choisit une base dans chaque représentation, formée des vecteurs propres de l'opérateur t , cette algèbre est encore la sous-algèbre abélienne maximale de $\mathcal{A}^+(SU_q(2))$ formée des éléments dont toutes les composantes sont des matrices diagonales. Dans la représentation de dimension $r+1$ les valeurs propres de t sont q^r, \dots, q^{-r} . On note alors $(e_{jk}^r; j, k \in \{-r, -r+2, \dots, r-2, r\})$ la base des matrices élémentaires correspondantes dans chaque $M_{r+1}(\mathbb{C})$. On note aussi u_{jk}^r la base duale dans $(\mathcal{A}^+(SU_q(2)))^*$. En utilisant encore les formules de Clebsch-Gordan (cette fois-ci pour le cas quantique, cf. Klimyk et Vilenkin [11], formules (6) et (9), §14.4.3, mais la normalisation n'est pas la même que celle du présent article), qui s'écrivent

$$\begin{aligned} u_{jj}^r u_{-1-1}^1 &= q^{-(r+j)/2} \frac{[r-j+2]_q}{[r+1]_q} u_{j-1j-1}^{r+1} + q^{(r-j+2)/2} \frac{[r+j]_q}{[r+1]_q} u_{j-1j-1}^{r-1} \\ u_{jj}^r u_{11}^1 &= q^{(r-j)/2} \frac{[r+j+2]_q}{[r+1]_q} u_{j+1j+1}^{r+1} + q^{-(r+j+2)/2} \frac{[r-j]_q}{[r+1]_q} u_{j+1j+1}^{r-1} \end{aligned}$$

on constate que l'algèbre engendrée par t et par le centre de $\mathcal{A}^+(SU_q(2))$ (c'est-à-dire par les e_{jj}^r) est stable par l'opérateur de transition. On en déduit les probabilités de transition de la chaîne de Markov

$$\begin{aligned} p((r, k), (r+1, k+1)) &= q^{(r-k)/2} \frac{[r+k+2]_q}{[r+1]_q} = \frac{q^{r+1} - q^{-k-1}}{2(q^{r+1} - q^{-r-1})} \quad (4) \\ p((r, k), (r+1, k-1)) &= q^{-(r+k)/2} \frac{[r-k+2]_q}{2[r+1]_q} = \frac{q^{-k+1} - q^{-r-1}}{2(q^{r+1} - q^{-r-1})} \\ p((r, k), (r-1, k+1)) &= q^{-(r+k+2)/2} \frac{[r-k]_q}{2[r+1]_q} = \frac{q^{-k-1} - q^{-r-1}}{2(q^{r+1} - q^{-r-1})} \\ p((r, k), (r-1, k-1)) &= q^{(r-k+2)/2} \frac{[r+k]_q}{2[r+1]_q} = \frac{q^{r+1} - q^{-k+1}}{2(q^{r+1} - q^{-r-1})}. \end{aligned}$$

On peut vérifier sur ces probabilités de transition que la coordonnée k suit une marche de Bernoulli, en effet $p((r, k), (r+1, k+1)) + p((r, k), (r-1, k+1)) = \frac{1}{2}$, qui ne dépend pas de k , mais que la coordonnée r n'est pas markovienne (car la probabilité $p((r, k), (r+1, k+1)) + p((r, k), (r+1, k-1))$, de passer de r à $r+1$ dépend de k). Par contre on voit facilement sur ces probabilités de transition, par récurrence sur n , que si la chaîne part de $(R_0 = 0, X_0 = 0)$, alors la loi conditionnelle de $(X_n$ sachant $R_1, \dots, R_n)$ est uniforme sur $\{-R_n, -R_n + 2, \dots, R_n\}$. On en déduit que le processus $(R_n; n \geq 1)$ est bien une chaîne de Markov de probabilités de transition (3).

En faisant tendre q vers 0, on constate que les probabilités de transition (4) convergent vers (2), ce qui redonne bien le théorème de Pitman.

Pour terminer avec $SU_q(2)$, faisons une dernière remarque sur la propriété de Markov de la chaîne de Bernoulli quantique déformée. On aurait pu, à la place de l'état η , utiliser l'état ρ , obtenu à partir du caractère de Woronowicz [17], qui est défini par $(A^{(2)})$ désignant la composante de A dans $M_2(\mathbb{C})$

$$\rho(A) = \frac{2}{[2]_q} \eta(tA) = \frac{1}{[2]_q} \text{Tr} \left(A^{(2)} \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix} \right).$$

Cet état a été utilisé par Izumi [9], qui a montré que l'opérateur associé laisse invariant le centre de $\mathcal{A}^+(SU_q(2))$ (voir aussi [7], [14]). Pour le vérifier il suffit de calculer les probabilités de transition associées, on trouve

$$\begin{aligned} \tilde{p}((r, k), (r+1, k+1)) &= \frac{2q}{[2]_q} p((r, k), (r+1, k+1)) = \frac{q^{r+2} - q^{-k}}{[2]_q (q^{r+1} - q^{-r-1})} \\ \tilde{p}((r, k), (r+1, k-1)) &= \frac{2q^{-1}}{[2]_q} p((r, k), (r+1, k-1)) = \frac{q^{-k} - q^{-r-2}}{[2]_q (q^{r+1} - q^{-r-1})} \\ \tilde{p}((r, k), (r-1, k+1)) &= \frac{2q}{[2]_q} p((r, k), (r-1, k+1)) = \frac{q^{-k} - q^{-r}}{[2]_q (q^{r+1} - q^{-r-1})} \\ \tilde{p}((r, k), (r-1, k-1)) &= \frac{2q^{-1}}{[2]_q} p((r, k), (r-1, k-1)) = \frac{q^r - q^{-k}}{[2]_q (q^{r+1} - q^{-r-1})}. \end{aligned}$$

Cela permet de voir que la restriction à l'algèbre engendrée par t donne lieu à la marche de Bernoulli décentrée de lois d'accroissements

$$p(k, k+1) = \frac{q}{[2]_q}, \quad p(k, k-1) = \frac{q^{-1}}{[2]_q}$$

alors que la restriction au centre donne la chaîne de Markov de lois de transition

$$p(k, k+1) = \frac{q[k+1]_q}{[2]_q [k]_q}, \quad p(k, k-1) = \frac{q^{-1}[k-1]_q}{[2]_q [k]_q}.$$

La chaîne de Markov sur le centre s'obtient donc par une transformation de Doob à partir de la marche aléatoire sur le dual du groupe engendré par t . Pour

retrouver la loi de la marche de Bernoulli quantique de tout-à-l'heure, on doit utiliser la formule $\eta^{\otimes N}(\cdot) = \frac{[2]_q^N}{2^N} \rho^{\otimes N}(t^{\otimes N})$. La preuve de la markovianité de la restriction au centre peut alors se faire suivant les lignes de [3], Theorem 4.1.

Évidemment il n'y a pas besoin d'introduire autant d'objets sophistiqués pour comprendre le théorème de Pitman, toutefois ces constructions donnent l'idée de généralisations naturelles. Il suffit de remplacer le groupe quantique $SU_q(2)$ par un autre groupe quantique, et de regarder comment se comporte la restriction des marches de Bernoulli à la sous-algèbre engendrée par le centre et par le tore maximal canonique, lorsque $q \rightarrow 0$. On espère alors obtenir des formules explicites, à la Pitman, qui permettent de construire le mouvement brownien à valeurs dans la chambre de Weyl du groupe compact sous-jacent, à partir d'un mouvement brownien de même dimension. En pratique cette approche a des limites, car il est difficile de calculer les coefficients de Clebsch-Gordan dans le cas général (voir toutefois l'article [8], qui est à l'origine des travaux de Kashiwara sur les cristaux). Néanmoins, il existe d'autres approches plus directes qui permettent d'obtenir de telles formules, et qui sont développées dans [5].

Références

1. P. Biane, *Marches de Bernoulli quantiques*. Séminaire de Probabilités, XXIV, 1988/89, 329–344, Lecture Notes in Math., 1426, Springer, Berlin, 1990.
2. P. Biane, *Équation de Choquet-Deny sur le dual d'un groupe compact*. Probab. Theory Related Fields 94 (1992), no. 1, 39–51.
3. P. Biane, *Minuscule weights and random walks on lattices*. Quantum probability & related topics, 51–65, QP-PQ, VII, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1992.
4. P. Biane, *Calcul stochastique non-commutatif*. Lectures on probability theory (Saint-Flour, 1993), 1–96, Lecture Notes in Math., 1608, Springer, Berlin, 1995.
5. P. Biane, P. Bougerol, N. O'Connell *Brownian paths and Littelmann paths*. À paraître dans Duke Math. Journal (2005).
6. P. Bougerol, T. Jeulin, *Paths in Weyl chambers and random matrices*. Probab. Theory Related Fields 124 (2002), no. 4, 517–543.
7. B. Collins, *Intégrales matricielles et probabilités non-commutatives*. Thèse, Université Paris 6, Janvier 2003.
8. E. Date, M. Jimbo, Michio, T. Miwa, *Representations of $U_q(\mathfrak{gl}(n, C))$ at $q = 0$ and the Robinson-Schensted correspondence*. Physics and mathematics of strings, 185–211, World Sci. Publishing, Teaneck, NJ, 1990.
9. M. Izumi, *Non-commutative Poisson boundaries and compact quantum group actions*. Adv. Math. 169 (2002), no. 1, 1–57.
10. M. Kashiwara, *Bases cristallines des groupes quantiques*. Rédigé par C. Cochet. Cours Spécialisés, 9. Société Mathématique de France, Paris, 2002.
11. A.U. Klimyk, N.Ja. Vilenkin, *Representation of Lie groups and special functions. Vol. 2. Class I representations, special functions, and integral transforms*. Mathematics and its Applications (Soviet Series), 74. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1993.

12. P. Littelmann, *Paths and root operators in representation theory*. Ann. of Math. (2) 142 (1995), no. 3, 499–525.
13. P.A. Meyer, *Quantum probability for probabilists*. Lecture Notes in Mathematics, 1538. Springer-Verlag, Berlin, 1993.
14. S. Neshveyev, L. Tuset, *The Martin boundary of a discrete quantum group*. math.OA/0209270.
15. K.R. Parthasarathy, *An introduction to quantum stochastic calculus*. Monographs in Mathematics, 85. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.
16. J.W. Pitman. *One-dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel process*. Adv. Appl. Probab. 7 (1975) 511-526.
17. S.L. Woronowicz, *Compact matrix pseudogroups*. Comm. Math. Phys. 111 (1987), no. 4, 613–665.

